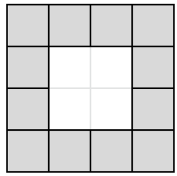
Открытая республиканская олимпиада

по математике

памяти Сайяра Утяганова

7 класс

1. У царя Салтана есть сад в виде клетчатого квадрата 4×4, из которого вырезан центральный квадрат 2×2 (см. рисунок). Также, у него есть 12 сортов помидоров, которыми он хочет засеять равные треугольные части сада. Докажите, что он сможет это сделать, засеяв при этом весь сад.



2. У Пети есть странный калькулятор, на котором есть числа 1 и 2, а также операции прибавить 5 и поделить на 2 чётное число. Какие натуральные числа может получить Петя, проделывая данные операции?

3. Назовём квадрат 100×100 *полумагическим*, если во всех его клетках стоят 0 или 1, и суммы чисел во всех строках и столбцах чётные. Изначально все клетки накрыты непрозрачными карточками. Найдите наименьшее число k такое, что открыв любые k карточек, вы сможете определить числа под остальными карточками.

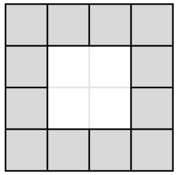
4. В четырёхугольнике $ABCD$ противоположные стороны равны и параллельны. Внутри него выбрана точка P такая, что треугольник ABP — равносторонний. Точка Q такова, что треугольник PCQ — равносторонний и точка Q лежит в той же полуплоскости, что и B относительно прямой PC. Докажите, что треугольник AQD — равносторонний.

5. Последовательность целых чисел a_n задана следующими условиями: для любого $n > 1$: $a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Пусть (i, j) – пара натуральных чисел, где j – чётное. Пусть r – остаток a_j при делении на a_i. Докажите, что найдётся натуральное число k такое, что a_k даёт остаток $a_i - r$ при делении на a_i.

Открытая республиканская олимпиада по математике памяти Сайяра Утяганова

8 класс

1. У царя Салтана есть сад в виде клетчатого квадрата 4×4, из которого вырезан центральный квадрат 2×2 (см. рисунок). Также, у него есть 12 сортов помидоров, которыми он хочет засеять равные треугольные части сада. Докажите, что он сможет это сделать, засеяв при этом весь сад.



2. Пусть $x > y$ — натуральные числа. Докажите, что

$$x(x^2 + y) - y(y^2 + x) \geqslant 3xy + 1.$$

3. Назовём квадрат 100×100 *полумагическим*, если во всех его клетках стоят 0 или 1, и суммы чисел во всех строках и столбцах чётные. Изначально все клетки накрыты непрозрачными карточками. Найдите наименьшее k такое, что открыв любые k карточек, вы сможете определить числа под остальными карточками.

4. Дан треугольник ABC. Внутри него отмечена точка T со следующими свойствами: $\angle BAT = 40°$, $\angle BCT = 20°$, $\angle CAT = 10°$, $\angle ACT = 30°$. Найдите значение $\angle BTC$.

5. Даны последовательности натуральных чисел a_n и b_n такие, что для любого натурального n: $2a_{n+1} > a_n$ и $b_n = 2022^{a_n} - 1$. Известно, что для любой пары натуральных чисел p и q верно, что либо $b_p \vdots b_q$, либо $b_q \vdots b_p$. Докажите, что для любого натурального $k \geqslant 2$: $a_{k+1} \vdots a_k$.

Открытая республиканская олимпиада

по математике

памяти Сайяра Утяганова

9 класс

1. Пусть $x > y$ — натуральные числа. Докажите, что

$$x(x^2+y) - y(y^2+x) \geqslant 3xy + 1.$$

2. Назовём квадрат 100×100 *полумагическим*, если во всех его клетках стоят 0 или 1 и суммы чисел во всех строках и столбцах чётные. Изначально все клетки накрыты непрозрачными карточками. Найдите наименьшее натуральное число k такое, что, открыв любые k карточек, вы сможете определить числа под остальными карточками.

3. Внутри правильного треугольника ABC выбрана точка T так, что $\angle BTC = 150°$. Докажите, что $AT^2 = BT^2 + CT^2$.

4. Целые числа x, y и k таковы, что $x^2 + y^2 = k$. Докажите, что существуют такие целые числа z и t, что $z^2 + t^2 = 74k$.

5. На доску 8×8 выставляют ферзей. Если новый поставленный ферзь бьёт кого-то из уже стоящих, то одного из ферзей, которых он бьёт, нужно с доски убрать. Какое наибольшее число ферзей может одновременно оказаться на доске (рассматриваются только моменты после снятия ферзя, если оно необходимо)?

Открытая республиканская олимпиада

по математике

памяти Сайяра Утяганова

10-11 класс

1. Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена $6x^2-100x+27$. Найдите значение выражения $x_1^3x_2+x_1^2x_2^2+x_2^3x_1$.

2. Назовём квадрат 100×100 *полумагическим*, если во всех его клетках стоят 0 или 1 и суммы чисел во всех строках и столбцах чётные. Изначально все клетки накрыты непрозрачными карточками. Найдите наименьшее натуральное число k такое, что, открыв любые k карточек, вы сможете определить числа под остальными карточками.

3. Какое наибольшее число точек общего положения (то есть таких, что никакие 3 не лежат на одной прямой) можно отметить на плоскости так, чтобы площадь любого треугольника с вершинами в данных точках была равна 2022?

4. В остроугольном треугольнике ABC проведена медиана AM. На отрезке AB отмечена точка D так, что $\angle ADM=\angle ACM$. В окружности, описанной около треугольника ACD, проведен диаметр AE. Докажите, что $BE=CE$.

5. Докажите, что для любых положительных чисел a, b и c выполняется неравенство:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}\right)^2+9\geqslant 3(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$