Итоги и правила апелляции 22 марта на сайте **www.kazan-math.com**

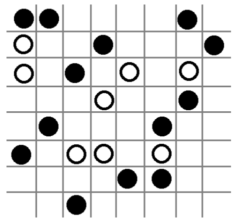
Олимпиада по математике г. Казани (18.03.2023)
2 класс

1. В турнире по теннису можно заработать 1, 2, 4, 8 или 16 баллов. Даниил участвовал в трех турнирах. Мог ли он набрать 40 баллов?

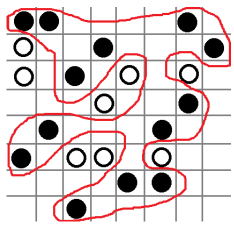
Решение: Даниил мог заработать в трех турнирах 16,16,8 баллов. В сумме будет 40 баллов.
Критерии:

- ***0 баллов**. Только верный ответ.*

2. Волки забрели в стадо овец (белые кружочки – овцы, черные – волки). Данди хочет построить забор так, чтобы внутри были только волки, а снаружи – овцы. Помогите ему! Нарисуйте забор сплошной замкнутой линией.

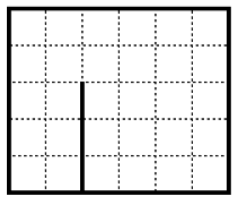


Решение: Один из возможных заборов приведен на рисунке справа.
Критерии:

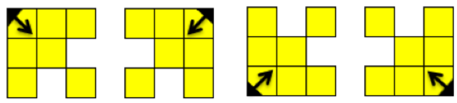


- ***4 балла**. Нарисован замкнутый забор, но внутри овцы.*
- ***4 балла**. Несущественно, но неправильно перерисованы волки/овцы, забор верный.*

3. На картинке представлена схема банковского сейфа. Это прямоугольная комната 5×6 с вертикальной стеной. У начальника охраны есть 7 камер, которые могут снимать свою клетку и на две клетки в трёх направлениях, как показано на рисунке. Через стену камера не снимает. Как начальнику охраны расставить эти камеры так, чтобы все клетки сейфа попали под видеонаблюдение камер?

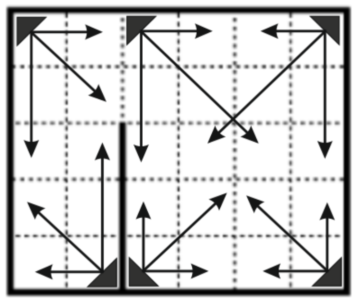


На рисунке изображены примеры расположения камер. Камеру можно направлять в любую из четырех сторон.



Комментарий: *Достаточно привести только один пример. Необходимо в своем примере обозначить, куда направлена каждая камера.*

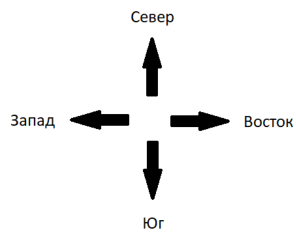
Решение: Один из возможных примеров расположения камер на рисунке. При этом достаточно поставить 6 камер, седьмую камеру можно поставить в любое место.



Критерии:

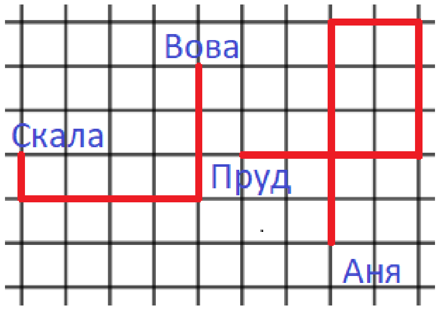
- ***4 балла**. Поставлено 6 камер, несколько клеток “не под боем камер”, но можно поставить седьмую камеру и пример станет верным.*
- ***4 балла.** Правильное расположение камер без указания направлений. Или направление одной из камер указано неверно.*

4. В стране Аньвовии все дороги ведут с севера на юг или с запада на восток. Однажды Аня вышла из своего дома на прогулку, прошла 5 км на север, затем 2 км на восток, 3 км на юг и, наконец, 4 км на запад. Так она добралась до пруда, где купалась. Вова вышел из палаточного лагеря, прошел 3 км на юг, 4 км на запад и 1 км на север. Так он пришел к скале, которая находилась на 5 км западнее пруда, в котором купалась Аня. На следующий день Вова



отправился из палаточного лагеря в гости к Ане. Какое наименьшее расстояние придется пройти Вове, если он будет идти только по дорогам?

Комментарий: *Не забудьте обосновать свой ответ.*



Решение: На рисунке красным показано как шли в первый день Аня и Вова. Чтобы Вова смог прийти к Ане на следующий день ему нужно пройти 4 км на юг и 3 км на восток. Итого 7 км.

Критерии:

- ***6 баллов***. *Правильный рисунок, но ошибка в подсчетах.*
- ***3 балла.*** *Нарисован правильный путь Ани и Вовы, но пруд занимает несколько клеток, от этого ответ меняется.*
- ***1 балл.*** *Только верный ответ.*

5. Агата написала двадцатизначное число 12345678901234567890. Федя выбрал четыре подряд идущие цифры из числа Агаты. Он сумел составить из этих четырех цифр два двузначных числа, первое из которых было на 1 больше второго. Какие два числа мог составить Федя? а) Приведите один пример. б) Приведите еще один пример.

Решение: Федя мог взять такие числа 7890 или 9012. И составить две пары чисел: 79, 80 или 19, 20.

Критерии:

- ***4 балла***. *Приведен один пример.*

6. В школе чародейства и волшебства второклассники занимаются только в понедельник, вторник и среду, а в остальные дни отдыхают. Каждый учебный день у них от четырех до шести уроков. Всего в расписании на неделю: чародейство – 3 урока, волшебство – 3 урока, зельеварение – 2 урока, мифические существа – 2 урока, вызов духов – 1 урок, боевая магия – 1 урок, драконоведение – 1 урок, гороскопы – 1 урок, левитация – 1 урок. В расписании нет окон (уроки идут подряд), и каждый день ученики приходят к первому уроку. Составьте расписание занятий второклассников, если известно, что:

- Все уроки чародейства проходят в один день, но никакие 2 урока чародейства не идут подряд.
- В среду не бывает уроков зельеварения.
- Волшебство изучают только третьим уроком.
- Вызов духов, боевая магия и левитация изучаются во вторник. Именно в таком порядке, но не обязательно подряд.
- В среду вторым уроком изучаются гороскопы, а в понедельник вторым уроком мифические существа.
- Один из уроков зельеварения стоит до урока драконоведения, а другой после. Они изучаются в один день, но не обязательно подряд.

Комментарий: *Приведите только ответ-расписание. Доказательство писать не нужно.*

Решение: единственно возможное расписание приведено ниже.

Критерии:

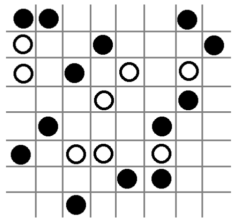
- ***0 баллов.*** *Только один день правильно.*
- ***4-6 баллов.*** *Перепутаны два урока, пропущен урок (в зависимости от того в разные ли дни и насколько сложно восстановить).*

Расписание уроков

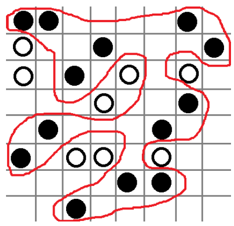
	Понедельник	Вторник	Среда
1.	Зельеварение	Вызов духов	Чародейство
2.	Мифические существа	Боевая магия	Гороскопы
3.	Волшебство	Волшебство	Волшебство
4.	Драконоведение	Левитация	Чародейство
5.	Зельеварение		Мифические существа
6.			Чародейство

Олимпиада по математике г. Казани (18.03.2023)

3 класс



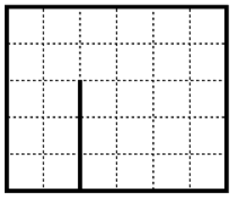
1. Волки забрели в стадо овец (белые кружочки – овцы, черные – волки). Данди хочет построить забор так, чтобы внутри были только волки, а снаружи – овцы. Помогите ему! Нарисуйте забор сплошной замкнутой линией.



Решение: один из возможных заборов приведен на рисунке справа.

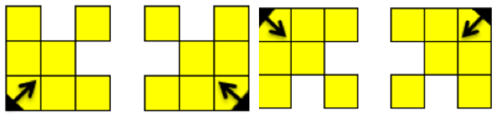
Критерии:

- ***4 балла***. *Нарисован замкнутый забор, но внутри овцы.*
- ***4 балла***. *Несущественно, но неправильно перерисованы волки/овцы, забор верный.*

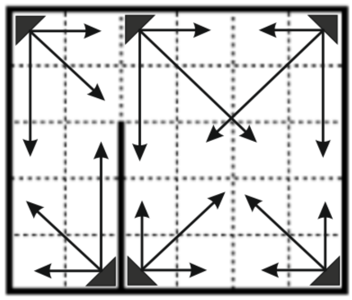


2. На картинке представлена схема банковского сейфа. Это прямоугольная комната 5×6 с вертикальной стеной. У начальника охраны есть 7 камер, которые могут снимать свою клетку и на две клетки в трёх направлениях, как показано на рисунке. Через стену камера не снимает. Как начальнику охраны расставить эти камеры так, чтобы все клетки сейфа попали под видеонаблюдение камер?

На рисунке изображены примеры расположения камер. Камеру можно направлять в любую из четырех сторон.



Комментарий: *Достаточно привести только один пример. Необходимо в своем примере обозначить, куда направлена каждая камера.*

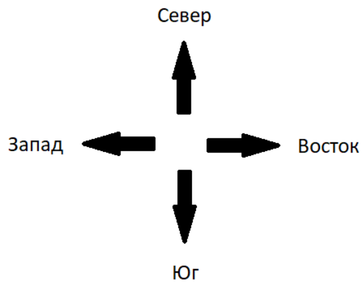


Решение: Один из возможных примеров расположения камер на рисунке. При этом достаточно поставить 6 камер, седьмую камеру можно поставить в любое место.

Критерии:

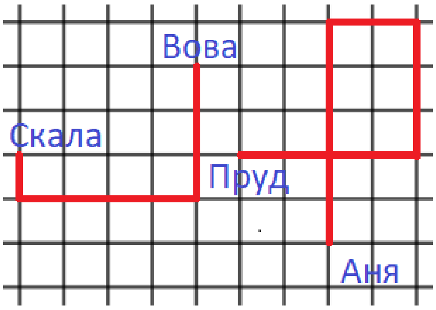
- ***4 балла***. *Поставлено 6 камер, несколько клеток “не под боем камер”, но можно поставить седьмую камеру и пример станет верным.*
- ***4 балла.*** *Правильное расположение камер без указания направлений. Или направление одной из камер указано неверно.*

3. В стране Аньвовии все дороги ведут с севера на юг или с запада на восток. Однажды Аня вышла из своего дома на прогулку, прошла 5 км на север, затем 2 км на восток, 3 км на юг и, наконец, 4 км на запад. Так она добралась до пруда, где купалась. Вова вышел из палаточного лагеря, прошел 3 км на юг, 4 км на запад и 1 км на север. Так он пришел к скале, которая находилась на 5 км западнее пруда, в котором купалась Аня. На следующий день Вова отправился из палаточного лагеря в гости к Ане. Какое наименьшее расстояние придется пройти Вове, если он будет идти только по дорогам?



Комментарий: *Не забудьте обосновать свой ответ.*

Решение: На рисунке красным показано как шли в первый день Аня и Вова. Чтобы Вова смог прийти к Ане на следующий день ему нужно пройти 4 км на юг и 3 км на восток. Итого 7 км.



Критерии:

6 баллов. *Правильный рисунок, но ошибка в подсчетах.*

1 балл. *Только верный ответ.*

3 балла. *Нарисован правильный путь Ани и Вовы, но пруд занимает несколько клеток, от этого ответ меняется.*

4. Агата написала двадцатизначное число 12345678901234567890. Федя выбрал четыре подряд идущие цифры из числа Агаты. Он сумел составить из этих четырех цифр два двузначных числа, первое из которых было на 1 больше второго. Какие два числа мог составить Федя? а) Приведите один пример. б) Приведите еще один пример.

Решение: Федя мог взять такие числа 7890 или 9012. И составить две пары чисел: 79, 80 или 19, 20.

Критерии:

- ***4 балла***. *Приведен один пример.*

5. В школе чародейства и волшебства третьеклассники занимаются только в понедельник, вторник и среду, а в остальные дни отдыхают. Каждый учебный день у них от четырех до шести уроков. Всего в расписании на неделю: чародейство – 3 урока, волшебство – 3 урока, зельеварение – 2 урока, мифические существа – 2 урока, вызов духов – 1 урок, боевая магия – 1 урок, драконоведение – 1 урок, гороскопы – 1 урок, левитация – 1 урок. В расписании нет окон (уроки идут подряд), и каждый день ученики приходят к первому уроку. Составьте расписание занятий третьеклассников, если известно, что:

- Все уроки чародейства проходят в один день, но никакие 2 урока чародейства не идут подряд.
- В среду не бывает уроков зельеварения.
- Волшебство изучают только третьим уроком.
- Вызов духов, боевая магия и левитация изучаются во вторник. Именно в таком порядке, но не обязательно подряд.
- В среду вторым уроком изучаются гороскопы, а в понедельник вторым уроком мифические существа.
- Один из уроков зельеварения стоит до урока драконоведения, а другой после. Они изучаются в один день, но не обязательно подряд.

Комментарий:

Приведите только ответ-расписание. Доказательство писать не нужно.

Решение: единственно возможное расписание приведено на рисунке.

Расписание уроков

Понедельник	Вторник	Среда
1. Зельеварение	1. Вызов духов	1. Чародейство
2. Мифические существа	2. Боевая магия	2. Гороскопы
3. Волшебство	3. Волшебство	3. Волшебство
4. Драконоведение	4. Левитация	4. Чародейство
5. Зельеварение	5.	5. Мифические существа
6.	6.	6. Чародейство

Критерии:

- ***0 баллов.*** *Только один день правильно.*

- ***4-6 баллов.*** *Перепутаны два урока, пропущен урок (в зависимости от того в разные ли дни и насколько сложно восстановить).*

6. В турнире по теннису можно заработать 1, 2, 4, 8 или 16 баллов. Андрей участвовал в пяти турнирах. Мог ли он набрать 59 баллов?

Решение: Предположим, что Андрей мог набрать 59 баллов. Тогда если Андрей наберет 16 баллов в 4 турнирах, то он наберет уже больше 59 баллов. Если Андрей наберет только в двух турнирах 16 баллов, то в сумме в пяти он наберет максимум 16+16+8+8+8=56 баллов. Меньше чем 59. Значит он ровно в трех турнирах набрал 16 баллов. Тогда в оставшихся двух турнирах он должен набрать 59-48=11 баллов. Если он нигде не набрал 1 балл, то тогда в двух последних турнирах он наберет четное количество баллов. Значит в одном из двух последних турнирах он наберет 1 балл. Но тогда на последний турнир придется набрать 10 баллов. Что не возможно. Значит, Андрей не мог в пяти турнирах набрать 59 баллов.

Критерии:

- ***1 балл.*** *Идея четности.*
- ***3 балла.*** *Доказано, что не может быть четырех турниров по 16 баллов.*
- ***3 балла.*** *Доказано, что двух турниров по 16 баллов недостаточно.*

Олимпиада по математике г. Казани (18.03.2023)
4 класс

1. В каждой клетке таблицы 4×4 записаны числа от 1 до 16 так, как показано на рисунке. Вырежьте 7 прямоугольников 1×2 с равными суммами так, чтобы остались два числа, сумма которых равна 10.

2	1	5	13
16	3	15	7
4	10	8	11
14	9	6	12

Комментарий: *Прямоугольники 1×2 можно поворачивать. Достаточно привести только один пример.*

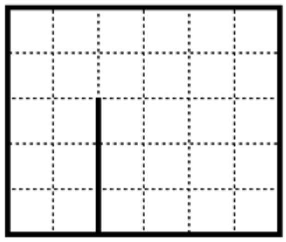
Решение. Единственное решение показано на картинке:

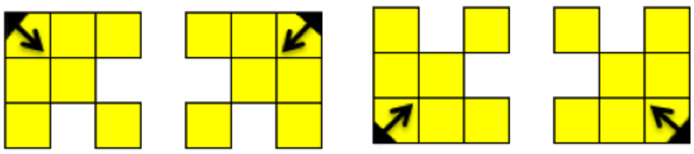
2	1	5	13
16	3	15	7
4	10	8	11
14	9	6	12

Критерии.

- ***2 балла***. *Перепутаны два прямоугольника, а все остальное верно.*

2. На картинке справа представлена схема банковского сейфа. Это комната 5×6 с вертикальной стеной. У начальника охраны есть 6 камер, которые могут снимать свою клетку и на две клетки в трёх направлениях, как показано на рисунке. Через стену камера не снимает. Как начальник охраны может расставить эти камеры, чтобы все клетки сейфа попали под видеонаблюдение камер?

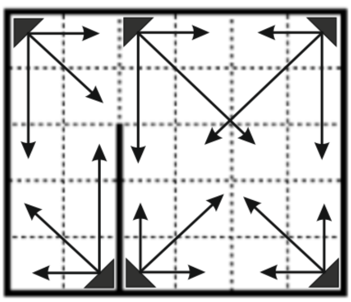




На рисунке слева изображены примеры расположения камер. Камеру можно направлять в любую из четырех сторон.

Комментарий: *Достаточно привести только один пример. Необходимо в своем примере обозначить, куда направлена каждая камера.*

Решение. Один из возможных примеров расположения камер на рисунке:



Критерии.

- ***0 баллов.*** *Есть клетка, которая не просматривается ни одной камерой.*
- ***4 балла.*** *Правильное расположение камер без указания направлений. Или направление одной из камер указано неверно.*

3. В школе чародейства и волшебства четвероклассники занимаются только в понедельник, вторник и среду, а в остальные дни отдыхают. Каждый учебный день у них от четырех до шести уроков. Всего в расписании на неделю: чародейство – 3 урока, волшебство – 3 урока, зельеварение – 2 урока, мифические существа – 2 урока, вызов духов – 1 урок, боевая магия – 1 урок, драконоведение – 1 урок, гороскопы – 1 урок, левитация – 1 урок. В расписании нет окон (уроки идут подряд), и каждый день они приходят к первому уроку. Составьте расписание занятий этой школы, если известно, что:

- Все уроки чародейства проходят в один день, но никакие 2 урока чародейства не идут подряд.
- В среду не бывает уроков зельеварения.
- Волшебство изучают только третьим уроком.
- Вызов духов, боевая магия и левитация изучаются во вторник. Именно в таком порядке, но не обязательно подряд.
- В среду вторым уроком изучаются гороскопы, а в понедельник вторым уроком мифические существа.
- Один из уроков зельеварения стоит до урока драконоведения, а другой после. Они изучаются в один день, но не обязательно подряд.

Комментарий: *В этой задаче приведите только ответ-расписание. Доказательство писать не нужно.*

Решение. Единственное возможное расписание уроков, удовлетворяющее всем условиям задачи представлено на рисунке:

Расписание уроков

	Понедельник	Вторник	Среда
1.	Зельеварение	Вызов духов	Чародейство
2.	Мифические существа	Боевая магия	Гороскопы
3.	Волшебство	Волшебство	Волшебство
4.	Драконоведение	Левитация	Чародейство
5.	Зельеварение		Мифические существа
6.			Чародейство

Критерии.

- ***0 баллов.*** *Только один день правильно.*
- ***4 балла.*** *Перепутаны два урока.*
- ***5 баллов.*** *Пропущен один урок.*

4. В группе детского сада 28 детей. Каждый принес в песочницу три игрушки. Динара – две машинки и одно ведерко, Мила – два ведерка и один мячик, Аня – два мячика и одну машинку. Остальные дети принесли одну машинку, одно ведерко и один мячик. По команде воспитательницы два ребенка обмениваются игрушками: каждый отдает и получает один предмет. Могло ли после нескольких таких обменов оказаться так, что у каждого ребенка все игрушки одного типа, то есть три машинки, три ведерка или три мячика?

Комментарий: *В этой задаче оценивается полное решение. Только ответ без обоснования будет оценен существенно ниже.*

Ответ. Нет, не могло.

Решение. Посчитаем количество машинок: у Динары две машинки, у Милы ни одной, у Ани и у остальных 25 детей по одной машинке, всего машинок 28. Так как у каждого ребенка после обменов должны быть все игрушки одного типа, то есть по три, то количество игрушек каждого типа должно делиться на три. Но 28 не делится на три – противоречие. Значит, не может оказаться так, что у каждого ребенка все игрушки одного типа.

Критерии.

- ***1 балл.*** *Подсчитано общее количество игрушек: машинок, ведерок и/или мячиков.*
- ***3 балла.*** *Есть идея необходимости делимости на три общего числа игрушек одного вида.*
- ***Минус 1 балл*** *– арифметическая ошибка не влияющая на логику решения.*

5.

По пути из дома в школу Миша проходит мимо магазина, библиотеки, детской площадки и автобусной остановки, именно в таком порядке. Магазин находится ровно посередине между домом и детской площадкой. Детская площадка находится ровно посередине между библиотекой и остановкой. Расстояние между домом и библиотекой такое же, как и между детской площадкой и школой. А расстояние между магазином и библиотекой в 8 раз меньше, чем расстояние между домом и площадкой. Найдите расстояние от дома до школы, если известно, что между автобусной остановкой и школой 300 метров.

Комментарий: *В этой задаче оценивается полное решение. Только ответ без обоснования будет оценен существенно ниже.*

Ответ. 1950 метров.

Решение. Возьмем за одну часть дороги расстояние между магазином и библиотекой. Тогда расстояние между домом и детской площадкой – это 8 частей. Так как магазин находится ровно посередине между ними, то расстояние от дома до магазина, как и от магазина до площадки – это 4 части. Тогда расстояние между библиотекой и площадкой – это 3 части, такое же расстояние между площадкой и остановкой. А между домом и библиотекой – это 5 частей, такое же расстояние от площадки до школы. От автобусной остановки до школы 5–3=2 части, и это 300 метров, значит, одна часть – это 150 метров. Всего от дома до школы 4+1+3+3+2=13 частей, что равняется 13×150=1950 метров.

Критерии.

- ***1 балл.*** *Только ответ.*
- ***3 балла.*** *Ответ с проверкой, что он подходит под условия задачи.*
- ***Минус 1 балл*** *– арифметическая ошибка не влияющая на логику решения.*

6. На школьной вечеринке собрались 13 мальчиков и 10 девочек. Мальчики принесли с собой конфеты, а девочки нет. Дети перераспределили конфеты так, что у каждой девочки оказалось ровно 5 конфет, а у всех мальчиков конфет стало поровну, но не 0. Девочки заметили, что теперь у всех девочек конфет в сумме больше, чем у всех мальчиков. Поэтому они отдали некоторые конфеты мальчикам так, что теперь у всех девочек в сумме столько же конфет, сколько и у всех мальчиков в сумме. Сколько всего конфет принесли мальчики на вечеринку?

Комментарий: *В этой задаче оценивается полное решение. Только ответ без обоснования будет оценен существенно ниже.*

Ответ: 76 конфет.

Решение: После того, как мальчики отдали конфеты, у каждого из них осталось по 1, 2 или 3 конфеты, а всего у мальчиков 13, 26 или 39 конфет. Если у каждого осталось 4 или более конфет, то в сумме у них 52 или более конфет, что больше, чем у девочек, а это невозможно.

Известно, что девочки потом смогли отдать некоторые конфеты так, чтобы у мальчиков и девочек стало поровну конфет, это значит, что общее число конфет четно. Так как у девочек было 5×10=50 – четное число конфет, то и у мальчиков оно должно было быть четным. Из 13, 26 и 39 подходит только 26. Значит, всего конфет было 50+26=76.

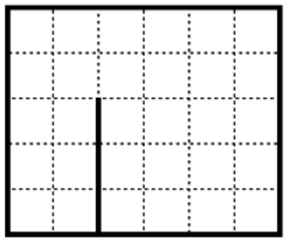
Критерии.

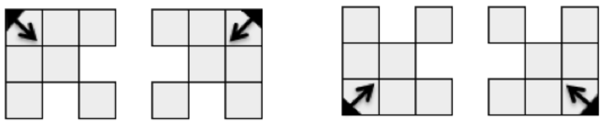
- ***1 балл.*** *Только ответ.*
- ***2 балла.*** *Ответ с проверкой, что он подходит под условия задачи.*
- ***3 балла.*** *Случай 2 конфет у мальчиков и доказательство, что у мальчиков должно быть четное число конфет.*
- ***6 баллов.*** *В полном решении пропущено объяснение, что если у мальчиков больше 4 конфет, то этот случай тоже не подойдет.*

Олимпиада по математике г. Казани (18.03.2023)
5 класс

В олимпиаде оцениваются полные решения.
Только ответы будут оценены существенно ниже.

1. На картинке представлена схема банковского сейфа. Это комната 5×6 с вертикальной стеной. У начальника охраны есть 6 камер, которые могут снимать свою клетку и на две клетки в трёх направлениях, как показано на рисунке ниже. Через стену камера не снимает. Помогите начальнику охраны расставить эти камеры так, чтобы все клетки сейфа попали под видеонаблюдение камер.

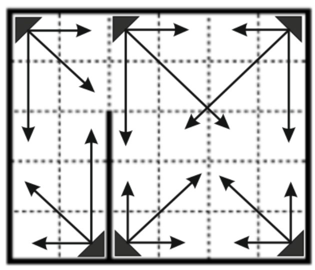




На рисунке изображены примеры расположения камер. Камеру можно направлять в любую из четырех сторон.

Комментарий: *Достаточно привести только один пример. Необходимо в своем примере обозначить, куда направлена каждая камера.*

Решение: Один из возможных примеров расположения камер на рисунке:



Критерии:
2 балла. *Правильное расположение камер без указания направлений.*
2 балла. *Направление одной из камер указано неверно.*

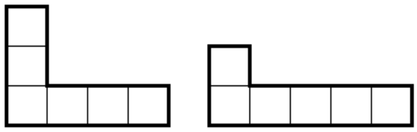
2. В школе чародейства и волшебства пятиклассники занимаются только в понедельник, вторник и среду, а в остальные дни отдыхают. Каждый учебный день у них от четырех до шести уроков. Всего в расписании на неделю: чародейство – 3 урока, волшебство – 3 урока, зельеварение – 2 урока, мифические существа – 2 урока, вызов духов – 1 урок, боевая магия – 1 урок, драконоведение – 1 урок, гороскопы – 1 урок, левитация – 1 урок. В расписании нет окон (уроки идут подряд), и каждый день они приходят к первому уроку. Составьте расписание занятий этой школы, если известно, что:

- Все уроки чародейства проходят в один день, но никакие два урока чародейства не идут подряд.
- В среду не бывает уроков зельеварения.
- Волшебство изучают только третьим уроком.
- Вызов духов, боевая магия и левитация изучаются во вторник. Именно в таком порядке, но не обязательно подряд.
- В среду вторым уроком изучаются гороскопы, а в понедельник вторым уроком мифические существа.
- Один из уроков зельеварения стоит до урока драконоведения, а другой после. Они изучаются в один день, но не обязательно подряд.

Комментарий: *В этой задаче приведите только ответ-расписание. Доказательство писать не нужно.*

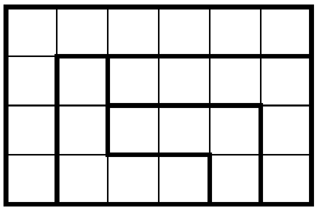
Решение: Единственное возможное расписание уроков, удовлетворяющее всем условиям задачи представлено на рисунке:

3. Гена разрезал прямоугольник 4×6 на уголки шириной в одну клетку. Например, на рисунке показаны все возможные уголки из шести клеток. Какое наибольшее число уголков разной площади могло получиться у Гены?



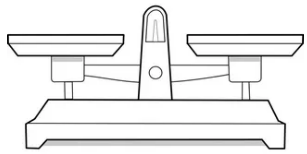
Комментарий: *Приведите пример разрезания, соответствующий ответу, и объясните, почему больше уголков получится не может.*

Ответ: 4. **Решение:** Минимальная площадь уголка – 3 клетки. Заметим, что пять фигур разных площадей имеют площадь по крайней мере $3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25 > 24$, поэтому пять уголкой разной площадей вырезано быть не может. Пример для четырёх уголков на рисунке.



Критерии:
3 балла. *Приведен верный пример разрезания с четырьмя уголками различных площадей.*
3 балла. *Приведено обоснование, что больше четырёх уголков различной площади быть не может.*

4. На прилавке у торговца в ряд лежат 11 дынь, неотличимых на вид. Из них три дыни спелые и они лежат подряд. Известно, что спелые дыни весят тяжелее неспелых и все спелые весят одинаково, как и неспелые. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти все спелые дыни?



Комментарий: *Чашечные весы показывают только на какой чашке груз тяжелее, но не определяют вес грузов. В этой задаче оценивается полное решение. Только ответ без обоснования будет оценен существенно ниже.*

Решение: Пронумеруем дыни в ряду. Взвесим 4 и 8 дыни.
Если веса оказались равны, то три спелые дыни – (1, 2, 3), (5, 6, 7) или (9, 10, 11). Взвесив 1 и 5 дыни, поймем, в какой из трёх куч окажется более тяжелая, а значит определим все три спелые дыни.
Если веса 4 и 8 дынь не равны, то более тяжелая – спелая. Если спелая – 4, то сравним веса 3 и 5. Если они равны, то спелые (3, 4, 5); если 3 тяжелее, то спелые (2, 3, 4); если 5 тяжелее, то спелые (4, 5, 6). Аналогично, если 8 тяжелее, будем взвешивать 7 и 9 дыни.

5. На новогодней вечеринке собрались 13 мальчиков и 10 девочек. Мальчики принесли с собой конфеты, а девочки – забыли. Дети перераспределили конфеты так, что у каждой девочки стало ровно 5 конфет, а у всех мальчиков конфет стало поровну, но не 0. Девочки заметили, что теперь у них конфет в сумме больше, чем у мальчиков, поэтому они отдали некоторые конфеты мальчикам обратно так, что теперь у девочек и мальчиков в сумме поровну конфет. Сколько конфет в сумме было у мальчиков изначально?

Ответ: 76 конфет. **Решение:** После того, как мальчики отдали конфеты, у каждого из них осталось по 1, 2 или 3 конфеты, а всего у мальчиков 13, 26 или 39 конфет. Если у каждого осталось 4 или более конфет, то в сумме у них 52 или более конфет, что больше, чем у девочек, а это невозможно.

Известно, что девочки потом смогли отдать некоторые конфеты так, чтобы у мальчиков и девочек стало поровну конфет, это значит, что общее число конфет четно. Так как у девочек было $5\times10=50$ – четное число конфет, то и у мальчиков оно должно было быть четным. Из 13, 26 и 39 подходит только 26. Значит, всего конфет было $50+26=76$.

Критерии:
1 балл. *Только ответ или ответ с проверкой, что он подходит под условия задачи.*
5 баллов. *В полном решении пропущено обоснование того, что у мальчиков не может быть 4 конфеты или больше.*

6. Андрей покрасил каждое натуральное число в один из трёх цветов: красный, зелёный или синий так, чтобы было хотя бы по одному числу каждого цвета. Могло ли оказаться, что сумма любых двух чисел разных цветов – число третьего цвета?

Комментарий: *Если да, то приведите пример покраски чисел и объясните, почему указанная покраска подходит. Если нет, объясните почему.*

Ответ: Не могло. **Решение:** Предположим, что Андрею удалось покрасить так числа, что сумма любых двух чисел разных цветов – число третьего цвета. Пусть число 1 покрашено в цвет a, тогда найдем ближайшее число x, которое покрашено в другой цвет, например в цвет b. По условию задачи число $x+1$ должно быть третьего цвета c, так как является суммой чисел разных цветов x (цвет a) + 1 (цвет b). Тогда число $x+2$ должно быть цвета b, так как $x+2 = x+1$ (цвет c) + 1 (цвет a). Таким образом, добавление к предыдущему числу 1 меняет цвет и мы получаем последовательность цветов начиная с числа x: b, c, b, c, b, c …

число	x	$x+1$	$x+2$	$x+3$	$x+4$	…	$2x+1$
цвет	b	c	b	c	b	…	c или b

Посмотрим на число $2x+1$. Оно больше x, а значит должно быть цвета c или b. Но $2x+1 = x$ (цвет b) + $x+1$ (цвет c), а значит его цвет должен быть a. Мы получили, что число $2x+1$ должно быть одновременно цвета c или b и цвета a. Что приводит нас к противоречию.

Критерии:
1 балл. *Доказано, что числа 1 и 2 не могут быть разных цветов.*

Олимпиада по математике г. Казани (18.03.2023)
6 класс

В олимпиаде оцениваются полные решения.

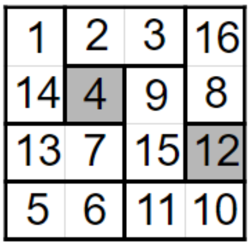
Только ответы будут оценены существенно ниже.

1. На доске 4×4 на рисунке справа в каждой клетке записаны числа от 1 до 16. Вырежьте 7 прямоугольников 1×2 так, чтобы остались два числа с суммой 16.

1	2	3	16
14	4	9	8
13	7	15	12
5	6	11	10

Комментарий: *Достаточно привести только один пример.*

Решение. Один из возможных примеров показан на картинке.



Критерии.

3 балла. *Указано, что следует оставить числа 4 и 12, но оставшаяся часть доски не разрезана на домино.*

2. Раян написал числа от 1 до 101, причём некоторые он написал красной ручкой, а остальные – синей. Известно, что наибольшее синее число равняется количеству чисел, написанных синей ручкой. Также, известно, что наименьшее число, написанное красной ручкой, вдвое меньше количества красных чисел. Сколько чисел Раян написал красной ручкой?

Ответ: 68.

Решение. Пусть наибольшее синее число – x. Легко заметить, что x не превосходит количества синих чисел, так как синими могут быть только числа от 1 до x. А так как x равен этому количеству, то это значит, что все числа 1 до x – синие. Так как x – наибольшее синее число, то все числа от x+1 до 101 – красные. Чисел от x+1 до 101 – 101-x. С другой стороны, по условию, 101-x = 2(x+1). Тогда 99 = 3x, следовательно x = 33. Значит красных чисел 101 - 33 = 68.

Критерии.

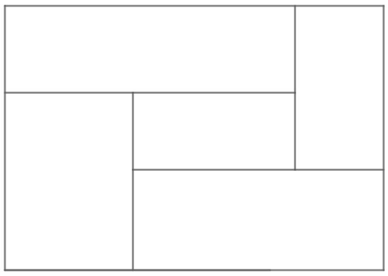
1 балл. *Только ответ.*

2 балла. *Указано, что синие числа идут подряд, начиная с 1. (Суммируется с первым критерием)*

5 баллов. *В полном решении автор бездоказательно пользуется фактом, что все синие числа идут подряд, начиная с 1.*

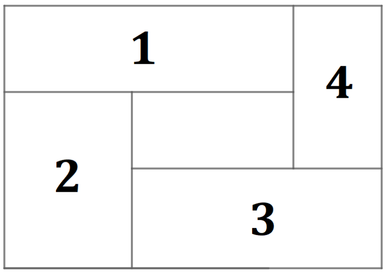
Минус 1 балл. *Ответ не на тот вопрос.*

3. Большой прямоугольник разрезали на пять маленьких прямоугольников как показано на рисунке. Могут ли все маленькие прямоугольники быть квадратами?



Ответ: нет.

Решение. Пусть сторона центрального квадрата – A, а у квадратов с номерами 1, 2, 3 и 4 – x_1, x_2, x_3, и x_4 соответственно. Тогда понятно, что A + x_1 = x_4, A + x_4 = x_3, A + x_3 = x_2, A + x_2 = x_1. Из этих равенств легко получить, что $x_1 < x_4 < x_3 < x_2 < x_1$. Таким образом $x_1 < x_1$, чего быть не может.



Критерии.

3 балла. *Выписаны циклические неравенства или равносильные им выражения, при этом дальнейших продвижений нет.*

Минус 1 балл. *За отсутствие каких либо объяснений обозначений и полученных на рисунке равенств/неравенств.*

4. Альберт едет по шоссе с постоянной скоростью. Известно, что в полдень он преодолел отметку $\overline{ab}$ километров, а в 12:42 – отметку $\overline{ba}$ километров. Ровно в 13:00 Альберт закончил своё путешествие. Оказалось, что за всё время он проехал $\overline{a0b}$ километров. Найдите скорость, с которой Альберт двигался по шоссе.

Комментарий: *Запись* $\overline{abc}$ *обозначает трехзначное число, состоящее из цифр a, b и c, запись* $\overline{ab}$ *– двузначное, состоящее из цифр a, b.*

Ответ: 90 км/ч или 1,5 км/мин.

Решение 1. С одной стороны, скорость Альберта равна $\frac{\overline{ba}-\overline{ab}}{42} = \frac{9b-9a}{42} = \frac{3b-3a}{14}$. С другой стороны, его скорость равна $\frac{\overline{a0b}-\overline{ba}}{18} = \frac{99a-9b}{18} = \frac{11a-b}{2}$. Получается, что $\frac{3b-3a}{14} = \frac{11a-b}{2}$, следовательно $6b - 6a = 154a - 14b$. Таким образом $20b = 160a$, а значит $b = 8a$. Так бывает только когда $b = 8$, $a = 1$ или $a = b = 0$, но второй случай невозможен, так как двузначные числа не могут начинаться с 0. Тогда $\frac{\overline{ba}-\overline{ab}}{42} = \frac{81-18}{42}$ = 1,5 км/мин = 90 км/ч.

Решение 2. Также будем пользоваться тем, что a и b не нули, так как двузначные числа не могут начинаться с нуля. Заметим, что за час Альберт проехал $\overline{a0b} - \overline{ab}$ = $100a + b - (10a + b) = 90a$ километров. Далее поймём, что за первые 42 минуты он проехал $\overline{ba} - \overline{ab}$ километров, что очевидно меньше 100, так как из двузначного числа вычли двузначное. За следующие 18 минут Альберт проехал $\overline{a0b} - \overline{ba}$ километров. Если $a > 1$, то $\overline{a0b} > 200$, а значит $\overline{a0b} - \overline{ba} > 100$, так как вычитаемое $\overline{ba} < 100$. Таким образом, в этом случае Альберт за 18 минут проедет больше 100 километров, а за 42 минуты меньше 100, что невозможно, так как он едет с постоянной скоростью. Значит $a = 1$. Как мы помним, скорость Альберта равна $90a$ км/ч = 90 км/ч.

Критерии.

1 балл. *Только ответ.*

1 балл. *Составлено уравнение, которое двумя способами выражает скорость или равносильные ему (возможно, системы уравнений).*

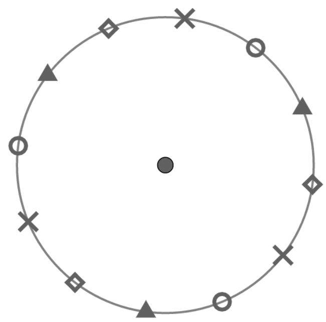
2 балла. *Получено уравнение “8a = b”.*

3 балла. *Доказано, что “a = 1”, дальнейших продвижений нет.*

Минус 1 балл. *Арифметическая ошибка.*

Критерии 1, 2, 3 суммируются. Критерии 1 и 4 суммируются.

5. На окружности расположены 12 лампочек разной формы, как показано на рисунке, а также одна лампочка расположена в центре. Некоторые из них изначально включены, а некоторые – выключены. За одно действие разрешается либо переключить 3 лампочки одинаковой формы, либо переключить 2 соседние лампочки на окружности и лампочку в центре. Верно ли, что независимо от того, какие лампочки были включены изначально, можно сделать так, чтобы все лампочки были включены?



Ответ: Верно.

Решение. Научимся менять состояние одной лампочки на окружности, не меняя состояние всех остальных лампочек. Понятно, что из этого будет следовать решение, так как мы сможем при необходимости поменять состояние центральной лампочки, сделав ход второго типа, а затем каждую выключенную на окружности лампочку включить, не меняя состояние всех остальных лампочек. Покажем, как изменить состояние выделенной на рисунке 1 лампочки, не меняя состояния всех остальных. Для этого поменяем три лампочки одного вида, как показано на рисунке 2. Далее поменяем две соседние лампочки и лампочку в центре, как показано на рисунке 3, а также сделаем аналогичную замену для трех следующих против часовой стрелки пар. Таким образом, состояние выбранной изначально лампочки изменилось один раз, а у всех остальных – четное число раз, то есть они остались в изначальном состоянии. Для всех остальных лампочек изменить их состояние можно точно таким же способом.

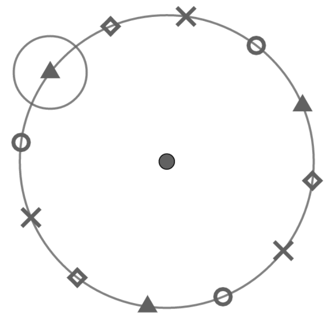


рис. 1

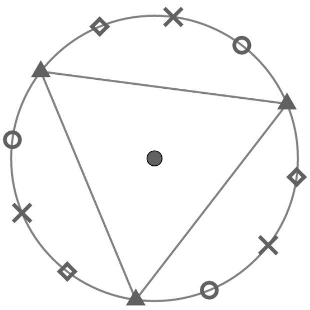


рис. 2

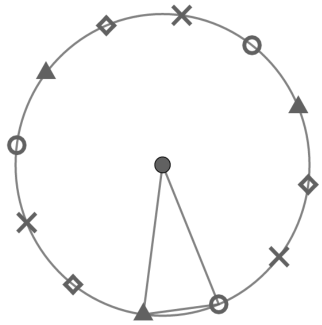


рис. 3

Критерии.

2 балла. *Приведен алгоритм для изменения состояния центральной лампочки, не меняя при этом состояния остальных лампочек.*

4 балла. *Приведен алгоритм для изменения состояния лампочки на окружности, не меняющий состояния других лампочек на окружности, но при этом непонятно, меняется ли состояние лампочки в центре.*

6 баллов. *Приведен алгоритм для изменения состояния лампочки на окружности, не меняющий состояния всех оставшихся лампочек.*

6. Участники турнира по боксу разделились на несколько команд так, что в каждой команде 5 или 7 человек. Затем они провели бои так, что каждый боец дрался со всеми другими участниками, кроме тех, которые были с ним в одной команде. Оказалось, что ровно 16 участников турнира выиграли хотя бы 1 бой. Какое наибольшее количество бойцов могло участвовать в турнире?

Ответ: 22 бойца.

Решение. *Оценка:* рассмотрим человека, который проиграл все бои. Тогда все люди не из его команды выиграли хотя бы один бой (против него). Таким образом, если есть ещё люди, проигравшие все бои, то они обязательно из его команды, а значит таких максимум 7. Тогда всего бойцов максимум $7 + 16 = 23$. Легко понять, что 23 нельзя представить в виде суммы нескольких пятерок и семерок, так как если команд из 7 человек – 0, то 23 на 5 не делится, если одна, то $23 - 7 = 16$ на 5 тоже не делится, далее $23 - 14 = 9$ тоже не делится, $23 - 21 = 2$ тоже не делится, а 28 уже больше 23. Значит максимум могло быть 22 участника.

Пример: пусть было 3 команды по 5 человек и одна команда из 7 человек. Тогда пусть все бойцы из команды, в которой 7 человек, кроме одного проиграют все свои бои. А оставшийся 7-ой пусть выиграет все бои. Результат остальных боев нам не важен.

Критерии.

1 балл. *Только ответ.*

2 балла. *Приведён пример для 22 бойцов.*

3 балла. *Доказано, что бойцов не более 22.*

Минус 1 балл. *В доказательстве оценки отсутствует, не доказано или доказано неверно утверждение, что ровно 23 бойцов быть не может.*

Указанные критерии суммируются между собой.

7 баллов. *Полное решение.*