Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан
5 класс, финальный тур. 28 января 2023 года. Решения задач

1. Расставьте числа от 0 до 9 так в прямоугольнике 2×5 на рисунке так, чтобы все пятизначные числа, читаемые в строках слева направо, и все двузначные числа, читаемые в столбцах сверху вниз, делились на 2 или на 3. *Достаточно привести один пример расстановки.*

Ответ:

3	1	7	4	6
9	5	2	8	0

2. В стихотворении после каждой гласной буквы идёт ровно три согласные. Согласных, после которых следующая буква — гласная, на 140 меньше, чем согласных, после которых следующая буква — согласная. Сколько всего может быть букв в этом стихотворении, если известно, что седьмая буква — гласная? *Укажите все возможные варианты и объясните, почему других нет.*

Ответ: 546 или 558 букв.

Решение: Согласные, после которых следует согласная, назовём буквами I вида, а согласные, после которых следует гласная — буквами II вида.

Между гласной и следующей гласной буквой идёт ровно три согласные, в каждом таком промежутке букв I вида на 1 больше, чем букв II вида. Рассмотрим случаи, какой по номеру может оказаться первая гласная буква.

1 случай: буква под номером «7» является первой гласной. Перед первой гласной букв I вида на 4 больше, чем II вида. После последней гласной буквы букв I вида на 2 больше, чем букв II вида (последняя буква стихотворения — ни I, ни II вид). Тогда среди оставшихся букв имеется на 134 буквы I вида больше, чем букв II вида. Следовательно, промежутков между гласными ровно 134. Тогда гласных букв всего 135, а согласных — $6 + 134 \cdot 3 + 3 = 411$. В итоге 546 букв.

2 случай: перед буквой под номером «7» есть ещё гласные. Тогда под номером «3» — гласная и перед ней других гласных быть не может. Тогда перед первой гласной букв I и II вида поровну. После последней гласной буквы, букв I вида на 2 больше, чем II вида. Тогда в промежутках букв I вида на 138 больше, чем букв II вида. Следовательно, промежутков между гласными — 138, а гласных — 139. Тогда всего букв — $139 + 2 + 138 \cdot 3 + 3 = 558$.

3. Существуют ли три клетчатых прямоугольника такие, что из любых двух можно сложить прямоугольник, а из всех трёх — нельзя? Накладывать прямоугольники друг на друга нельзя. *Обоснуйте свой ответ.*

Ответ: Да.

Решение: Например, подходят прямоугольники 1×2, 2×3 и 1×3. Любые два имеют одинаковую сторону, по которой их можно приложить друг к другу и получить прямоугольник. Из трёх же сложить прямоугольник не удастся, поскольку суммарная площадь равна 11, а единственный прямоугольник с этой площадью — 1×11 — невозможно выложить с использованием прямоугольника 2×3.

4. В магазине продаются гантели четырёх цветов. Гантели одного цвета весят одинаково, но наклейки, на которых были написаны веса гантель, потерялись. Аким может поднять: 1) три красные гантели, 2) одну синюю и две жёлтые. При этом он не может поднять 3) одну синюю и две красные, 4) четыре жёлтые, 5) одну синюю и одну зелёную. Могут ли веса гантель быть равны 16, 14, 10 и 7 килограммов в каком-то порядке? *Обоснуйте свой ответ.*

Ответ: Не могло.

Решение: Любой вес, который может поднять Аким легче, чем любой вес, который он поднять не может. Будем обозначать веса гантель по первой букве их цвета.

Заметим, что 3к легче, чем с + 2к, значит к < с.

с + 2ж < с + 2к, тогда ж < к.

с + 2ж < 4ж, тогда с < 2ж.

с + 2ж < с + з, тогда 2ж < з.

Тогда веса гантель должны следовать так в порядке убывания: з > с > к > ж, и соответственно быть равны з = 16, с = 14, к = 10, ж = 7, но тогда неверно, что 2ж > с. Значит такого быть не могло.

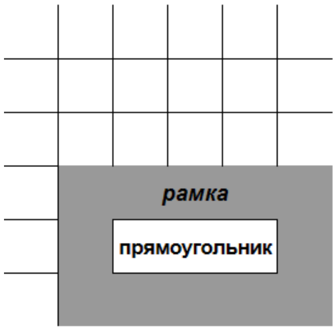
5. Можно ли расставить цифры сегодняшней даты (28.01.2023) в какие-то восемь клеток таблицы 3×3, а в оставшуюся клетку поставить любую цифру от 0 до 9 так, чтобы сумма цифр во всех столбцах и во всех строках была одинаковой? *Обоснуйте свой ответ.*

Ответ: Не могло.

Решение: Допустим, что так удалось расставить цифры. Сумма чисел в таблице должна будет делиться на 3, так как в трёх столбцах суммы равны. Сумма имеющихся восьми чисел $2 + 8 + 0 + 1 + 2 + 0 + 2 + 3 = 18$ делится на 3, поэтому оставшаяся цифра тоже должна будет делиться на 3. Если она — «0» или «3», то сумма чисел в одном столбце равна $18 : 3 = 6$ или $21 : 3 = 7$, чего быть не может, так как в таблице уже есть цифра «8». Если девятая цифра — «6», то сумма чисел в любом столбце и любой строке равна $24 : 3$

= 8, но тогда с цифрой «8» в одной строке и одном столбце должны быть только нули, но их всего два. Если девятая цифра — «9», то сумма в одном столбце и в одной строке равна 27 : 3 = 9, но тогда с цифрой «8» в строке и столбце должны быть по одной цифре «0» и «1», но у нас есть только одна цифра «1». Противоречие.

6. Программист Айрат рисует QR-коды. Для этого он берет белое поле 15×15 и закрашивает его клетки по следующему правилу: он выбирает какой-нибудь прямоугольник из клеток (возможно, уже частично закрашенный) и закрашивает рамку толщиной в одну клетку вокруг него со всех четырех его сторон при условии, что в рамке все клетки до этого были белыми. Может ли в какой-то момент оказаться, что белых клеток на доске ровно вдвое больше, чем чёрных? *Обоснуйте свой ответ.*



Ответ: Не может.

Решение: Каждым действием закрашивается чётное количество клеток доски, а изначально их не было вообще. Поэтому в любом момент количество закрашенных клеток в таблице будет оставаться чётным. Но если осталось белых клеток вдвое больше, чем чёрных, то чёрные клетки составляют одну треть от общего количества клеток: (15 · 15) : 3 = 75, а это — нечетное число.