

7-я Межрегиональная олимпиада для учителей по математике Казань, 3.10.2021

Уважаемые участники!

Свои вопросы Вы можете задать по электронному адресу kazan-mat@mail.ru. Общие комментарии по задачам смотрите на странице <http://www.kazan-math.com>. На этой же странице Вы найдете ссылку на форму для вбивания ответов. Для Вашего удобства предлагается решить задачи, перенести ответы себе на черновик и затем по черновику заполнить форму для ответов. Правильный ответ оценивается в 2 балла, неправильный — в 0 баллов, ответ «не знаю» оценивается в 1 балл. Напоминаем, что возможность отправить ответы закроется в 18:00 по Московскому времени.

Желаем успеха!

1. В двух 10-литровых сосудах находится раствор соли. В первом — 3 литра 5%-го раствора, во втором — 5 литров 13%-го.

а) Если оба раствора слить в одну банку, то концентрация полученного раствора равна (округлите до целого числа процентов)

(I) 8%; (II) 9%; (III) 10%; (IV) 11%; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

б) Сколько раствора надо перелить из второй банки в первую, чтобы получить в ней концентрацию соли 7%?

(I) 1 л; (II) 1,5 л; (III) 2 л; (IV) эта ситуация невозможна; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

в) Из второй банки в первую переливаем 1 л раствора, перемешиваем и переливаем 1 л новой смеси обратно. Какова будет концентрация раствора во второй банке?

(I) 11%; (II) 11,5%; (III) 11,8%; (IV) 12%; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

г) Сколько раз надо повторять переливания из второй банки в первую и обратно, чтобы получить во второй банке 5 л раствора с концентрацией 9% соли? (В ответе укажите число пар переливаний.)

(I) 2; (II) 3; (III) не менее 4; (IV) эта ситуация невозможна; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

2. а) Имеется забор длиной 72 метра. Можно ли с его помощью оградить участок прямоугольной формы площадью 320 м^2 ?

(I) да; (II) нет; (III) невозможно определить однозначно; (IV) среди приведённых ответов нет правильного; (V) не знаю.

б) Какова наибольшая площадь участка прямоугольной формы, который можно оградить забором длиной 72 метра?

(I) 320; (II) 322; (III) 324; (IV) среди приведённых ответов нет правильного; (V) не знаю.

в) Какова наименьшая длина забора, с помощью которого можно оградить участок прямоугольной формы площадью 900 м^2 ?

(I) 130; (II) 110; (III) 120; (IV) среди приведённых ответов нет правильного; (V) не знаю.

г) Имеется забор длиной 72 метра. Можно ли с его помощью оградить участок площадью более 400 м^2 необязательно прямоугольной формы?

(I) да; (II) нет; (III) среди приведённых ответов нет правильного; (IV) не знаю.

3. У Пети есть кубики одинаковой формы разного цвета: 2 красных, 4 синих и 6 зелёных. Петя строит из них башню, ставя каждый следующий кубик на предыдущий.

а) Сколько различных башен высотой 2 кубика может построить Петя?

(I) 8; (II) 9; (III) 66; (IV) среди приведённых ответов нет правильного; (V) не знаю.

б) Сколько различных башен высотой 3 кубика может построить Петя?

(I) 84; (II) 26; (III) 18; (IV) среди приведённых ответов нет правильного; (V) не знаю.

в) Сколько различных башен высотой 12 кубиков может построить Петя?

(I) 13 860; (II) 34 560; (III) 479 001 600; (IV) среди приведённых ответов нет правильного; (V) не знаю.

г) Сколько различных башен высотой 11 кубиков может построить Петя? (Один кубик не будет использоваться.)

(I) 13860; (II) 31 680; (III) 39 916 800; (IV) среди приведённых ответов нет правильного; (V) не знаю.

4. Дан набор попарно различных целых чисел. Каждое из чисел набора является суммой каких-то двух других чисел, входящих в этот набор.

а) Какое наименьшее возможное количество отрицательных чисел может быть в таком наборе?

(I) 1; (II) 2; (III) 3; (IV) 4; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

б) В наборе 10 чисел. Какое наибольшее возможное количество отрицательных чисел может быть в этом наборе?

(I) 9; (II) 8; (III) 7; (IV) 5; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

в) Какое наименьшее возможное количество чисел может быть во всём наборе?

(I) 7; (II) 6; (III) 5; (IV) 4; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

г) Два числа из набора известны — 0 и 4. Какое наименьшее количество чисел в таком наборе?

(I) 7; (II) 6; (III) 5; (IV) 4; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

5. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Медианы треугольников ABC , BCD и CDE пересекаются в точках M_1 , M_2 и M_3 соответственно. Точки N_1 , N_2 и N_3 — середины сторон AB , AE и ED соответственно.

а) Найдите отношение $M_1M_3 : N_1N_3$.

(I) 1 : 2; (II) 2 : 3; (III) 3 : 4; (IV) среди приведённых ответов нет правильного; (V) не знаю.

б) Отрезки M_1N_3 и M_3N_1 пересекаются в точке K . Найдите отношение площадей треугольников M_1KN_1 и M_3KN_3 .

(I) 3 : 4; (II) 2 : 3; (III) 1 : 1; (IV) среди приведённых ответов нет правильного; (V) не знаю.

в) Найдите отношение $M_1M_2 : N_2N_3$.

(I) 1 : 2; (II) 2 : 3; (III) 3 : 4; (IV) среди приведённых ответов нет правильного; (V) не знаю.

г) Отрезки M_1N_3 и M_2N_2 пересекаются в точке O . Найдите отношение площадей треугольников OM_1M_2 и ON_2N_3 .

(I) 2 : 3; (II) 3 : 4; (III) 4 : 9; (IV) среди приведённых ответов нет правильного; (V) не знаю.

6. Функция f такова, что для любых положительных x и y выполняется равенство $f(x/y) = f(x) - f(y)$.

а) Чему равно значение $f(1)$?

(I) 0; (II) 1; (III) невозможно определить; (IV) среди приведённых ответов нет правильного; (V) не знаю.

б) Существует ровно одна функция f , удовлетворяющая условиям задачи?

(I) да, верно; (II) нет ни одной такой функции f ; (III) таких функций f бесконечно много; (IV) среди приведённых ответов нет правильного; (V) не знаю.

в) Известно, что $f(2021) = -1$. Чему равно значение $f\left(\frac{1}{2021}\right)$?

(I) 0; (II) 1; (III) -1; (IV) среди приведённых ответов нет правильного; (V) не знаю.

г) Может ли равенство $f(x) \cdot f(x^{-1}) = 1$ выполняться хотя бы для одного положительного x ?

(I) да, может; (II) нет, не может; (III) среди приведённых ответов нет правильного; (IV) не знаю.

7. а) Максимум функции $\ln \cos x + \ln \sin x$ равен:

(I) 0; (II) $\ln 2$; (III) $-\ln 2$; (IV) он не существует; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

б) Минимум функции $\ln \cos x + \ln \sin x$ равен:

(I) 0; (II) $\ln 2$; (III) $-\ln 2$; (IV) он не существует; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

в) Функция $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$ является

(I) чётной; (II) нечётной; (III) ни чётной, ни нечётной; (IV) среди приведённых ответов нет правильного; (V) не знаю.

г) Функция $g(x) = (\sin 2x + \cos 2x + 1)(\sin x - \cos x)$ является

(I) чётной; (II) нечётной; (III) ни чётной, ни нечётной; (IV) среди приведённых ответов нет правильного; (V) не знаю.

8. Одним выстрелом стрелок попадает в мишень с вероятностью $p = 0,8$. Он стрелял дважды.

а) Какова вероятность, что мишень была поражена? (То есть в нее попали хотя бы один раз.)

(I) 32%; (II) 64%; (III) 80%; (IV) 96%; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

б) Какова вероятность, что мишень была поражена ровно один раз?

(I) 16%; (II) 32%; (III) 64%; (IV) 80%; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

в) Какова вероятность того, что стрелок не попал в мишень ни разу за два выстрела, если известно, что хотя бы один раз он промахнулся?

(I) 0,04; (II) 0,2; (III) $1/9$; (IV) $8/9$; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

г) При каком значении p вероятность попасть ровно один раз совпадает с вероятностью попасть оба раза?

(I) $1/3$; (II) $1/2$; (III) $2/3$; (IV) $3/4$; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

9. В треугольнике ABC отрезок BK делит его на два неравных равнобедренных треугольника.

а) Пусть BK — медиана треугольника ABC . Тогда треугольник ABC обязательно

(I) равносторонний; (II) равнобедренный; (III) прямоугольный; (IV) эта ситуация невозможна; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

б) Пусть BK — биссектриса треугольника ABC . Тогда треугольник ABC обязательно

(I) равносторонний; (II) равнобедренный; (III) прямоугольный; (IV) эта ситуация невозможна; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

в) Треугольники ABK и BKC подобны. Тогда треугольник ABC обязательно

(I) равносторонний; (II) равнобедренный; (III) прямоугольный; (IV) эта ситуация невозможна; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

г) Треугольник ABC — равнобедренный, $AB = 1$. Количество таких треугольников

(I) один; (II) два; (III) три; (IV) таких треугольников нет; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

10. В заданиях а)–в) рассматриваются тетраэдры, у которых площадь основания равна 12, а все боковые грани образуют углы 30° с основанием.

а) Площадь боковой поверхности такого тетраэдра равна

(I) 6; (II) $6\sqrt{3}$; (III) $8\sqrt{3}$; (IV) 24; (V) недостаточно данных для решения задачи; (VI) не знаю.

б) Пусть периметр основания равен 16. Высота тетраэдра равна:

(I) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (II) $\sqrt{3}$; (III) 1,5; (IV) эта ситуация невозможна; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

в) Пусть высота тетраэдра равна 1. Его объём равен

(I) 3; (II) $3\sqrt{3}$; (III) $\sqrt{3}$; (IV) эта ситуация невозможна; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

г) У тетраэдра $ABCD$ боковые грани наклонены под углом 60° к плоскости основания ABC . Площадь основания тетраэдра равна 12. Площадь полной поверхности тетраэдра равна

(I) 24; (II) $6\sqrt{3} + 12$; (III) $8\sqrt{3} + 12$; (IV) 36; (V) недостаточно данных для решения задачи; (VI) не знаю.