7-я Межрегиональная олимпиада для учителей по математике Казань, 7.10.2021

Уважаемые участники!

Свои вопросы Вы можете задать по электронному адресу kazan-mat@mail.ru.

Общие комментарии по задачам и правила отправки работы смотрите на сайте http://www.kazan-math.com. Рекомендуем Вам периодически обновлять страницу, чтобы видеть самые последние общие комментарии.

Желаем успеха!

В следующем блоке задач оценивается полное решение, с обоснованием. Максимальный балл за каждую из задач равен 7.

1. «Нехорошая квартира», в которой происходило действие романа М.А.Булгакова «Мастер и Маргарита», расположена на 5 этаже в доме 302-бис и имеет номер 50. Будем считать, что в доме четыре одинаковых подъезда, пронумерованных слева направо. Если же нумеровать их справа налево, то номер этой квартиры будет 82 (внутри подъезда порядок нумерации не меняется). Сколько этажей в доме? Считаем, что на каждом этаже число квартир одинаковое.

2. *а*) Существуют ли 100 различных натуральных чисел, сумма которых делится на каждое из заданных чисел?

б) Существуют ли 100 различных натуральных чисел, сумма которых делится на сумму любых двух из данных чисел?

3. *а*) Функция $f(x)$ задана на всей числовой оси, причём для всех x выполняются неравенства: $f(x+3) \leqslant f(x) \leqslant f(x+4)$. Докажите, что функция $f(x)$ — периодическая. Придумайте хотя бы одну функцию $f(x)$, удовлетворяющую этим условиям.

б) Существует ли функция $f(x)$, для которой при всех x справедливы неравенства $f(x+3) \leqslant f(x) < f(x+4)$?

4. Алекс и Том загадали два четырёхзначных числа, и у каждого из них оказалось столько же простых делителей, сколько и составных. Найдите наибольшее возможное значение разности этих чисел.

5. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA' и BB' пересекаются в точке H, M — середина AB. Прямая $A'B'$ пересекает продолжение стороны AB в точке D. Докажите, что прямая MH перпендикулярна прямой CD.

Для каждой из следующих задач приведено «решение». В этом «решении» необходимо найти ошибки, если таковые имеются, и написать верное решение. Максимальный балл за каждую из задач этого блока также равен 7.

6. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2} \leqslant 2.$$

«Решение». Пусть $M(x;y)$ — точка координатной плоскости Oxy, тогда левая часть этого уравнения есть сумма расстояний от точки M до точек $A(0;0)$ и $B(2;0)$.

В треугольнике ABM сумма длин двух сторон AM и BM больше длины третьей стороны AB, которая, очевидно, равна 2. Поэтому $AO + BO > 2$, то есть левая часть исходного неравенства всегда больше правой части.

«Ответ:» нет решений.

7. Решите уравнение:

$$x^{x^{x^{\cdots}}} = \log_x 4.$$

«Решение». Ясно, что $x > 0$ и $x \neq 1$. Перепишем уравнение в виде $x^{\left(x^{x^{x^{\cdots}}}\right)} = 4$. Так как $\left(x^{x^{x^{\cdots}}}\right)$ тоже равно 4, то исходное уравнение равносильно $x^4 = 4$, то есть $x = \pm\sqrt{2}$. С учётом ограничения $x > 0$ получаем

«Ответ:» $x = \sqrt{2}$.

8. В коробке лежат 40 карандашей разной длины и нескольких цветов, среди них ровно 5 красных. Сколькими способами можно выбрать 10 карандашей так, чтобы среди них был хотя бы один красного цвета?

«Решение». Один красный карандаш можно выбрать пятью способами. Затем достаточно выбрать любые 9 карандашей из осташихся 39. Количество способов, которыми это можно сделать, равно C_{39}^9. Так как оба выбора происходят независимо, то искомое количество способов равно $5 \cdot C_{39}^9$.

«Ответ:» $5 \cdot C_{39}^9$.

9. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений имеет ровно два различных решения:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a^2, \\ \quad xy \quad = 2a^2 + 3a. \end{cases}$$

«Решение». Система уравнений не меняется, если одновременно заменить x на y, а y — на x. То же самое верно, если заменить x на $-x$ и y на $-y$. Другими словами, если $(x_0; y_0)$ — решение системы, то решениями будут и $(y_0; x_0)$, $(-x_0; -y_0)$. Поскольку система имеет ровно два решения, какие-то два из них совпадают. Пусть $(x_0; y_0)$ — одно из совпадающих, тогда возможны два случая:

1) $(x_0; y_0) = (y_0; x_0)$, то есть $x_0 = y_0$, и

2) $(x_0; y_0) = (-x_0; -y_0)$, то есть $x_0 = -x_0 = 0$, $y_0 = -y_0 = 0$.

В последнем случае также $x = y$, поэтому достаточно разобрать только первый случай.

Подставим $y = x$ в уравнения системы. Тогда из первого уравнения получим $2x^2 = 2a^2$, а из второго $x^2 = 2a^2 + 3a$. Значит, $a^2 = 2a^2 + 3a$, откуда $a = 0$, $a = -3$.

«Ответ:» $a = 0$, $a = -3$.

10. Решите уравнение: $x^2 - 6 = \sqrt{x + 6}$.

«Решение». Воспользуемся следующим известным фактом: пусть $f(x)$ — возрастающая функция, тогда уравнения $f(f(x)) = x$ и $f(x) = x$ равносильны.

Введем функцию $f(x) = \sqrt{x + 6}$, заданную для всех $x \geqslant -6$. Уравнение имеет вид $f^{-1}(x) = f(x)$ или $x = f(f(x))$. В силу того, что функция f — возрастающая, уравнение равносильно $f(x) = x$, то есть соотношению $\sqrt{x + 6} = x$, которое легко сводится к квадратному. Ясно, что $x \geqslant 0$; при этом условии уравнение принимает вид $x^2 - x - 6 = 0$. Из двух корней -2 и 3 подходит только $x = 3$.

«Ответ». $x = 3$.