

Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан

7 класс, финальный тур. 12 февраля 2022 года

Время выполнения заданий — 180 минут

Максимальный балл — 42

Предварительные результаты будут опубликованы 21 февраля. Заявления на апелляцию принимаются до 22.00 23 февраля. Подробности на сайте kazan-math.com.

1. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды пять аборигенов собрались вместе и каждый сказал: «Среди присутствующих у меня ровно один друг рыцарь и ровно один друг лжец». Сколько рыцарей могло быть среди них? Если первый человек дружит со вторым, то и второй дружит с первым. *Укажите все ответы и объясните, почему других нет.*

2. По аналогии с десятичной записью числа определим *квазидесятичную* запись числа с единственным отличием: вместо степеней числа 10 будем использовать степени числа -10 . Например, число 174 можно записать в квазидесятичной записи как 234, потому что

$$234_{-10} = 2 \cdot (-10)^2 + 3 \cdot (-10)^1 + 4 \cdot (-10)^0 = 200 - 30 + 4 = 174_{10}.$$

Представьте номер текущего года в квазидесятичной записи. *Достаточно привести один пример и показать, что он подходит.*

3. В школе ровно половина учеников учится в первую смену, остальные учатся во вторую смену. 80% всех девочек учатся в первую смену. 70% всех мальчиков учатся во вторую смену. Какой процент среди учеников первой смены составляют мальчики? *Обоснуйте свой ответ.*

4. Четыре автомобиля едут по одной и той же дороге, в одном и том же направлении, но с разными постоянными скоростями. Всего существует 24 способа расположить четыре машины друг за другом. Какое наибольшее количество из этих способов может реально случиться в течение этой поездки? *Обоснуйте свой ответ.*

5. В четырехугольнике $ABCD$ известно, что $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 150^\circ$ и $AB = 2BC$. Пусть K — точка пересечения прямой BC и перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую CD . Докажите, что $DK \parallel AB$.

6. При каком наименьшем натуральном n дробь

$$\frac{26 \cdot 27 \cdot \dots \cdot (26 + n)}{26 \cdot 25 \cdot \dots \cdot (26 - n)}$$

будет целой? *Обоснуйте свой ответ.*

Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан

7 класс, финальный тур. 12 февраля 2022 года

Время выполнения заданий — 180 минут

Максимальный балл — 42

Предварительные результаты будут опубликованы 21 февраля. Заявления на апелляцию принимаются до 22.00 23 февраля. Подробности на сайте kazan-math.com.

1. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды пять аборигенов собрались вместе и каждый сказал: «Среди присутствующих у меня ровно один друг рыцарь и ровно один друг лжец». Сколько рыцарей могло быть среди них? Если первый человек дружит со вторым, то и второй дружит с первым. *Укажите все ответы и объясните, почему других нет.*

2. По аналогии с десятичной записью числа определим *квазидесятичную* запись числа с единственным отличием: вместо степеней числа 10 будем использовать степени числа -10 . Например, число 174 можно записать в квазидесятичной записи как 234_{-10} , потому что

$$234_{-10} = 2 \cdot (-10)^2 + 3 \cdot (-10)^1 + 4 \cdot (-10)^0 = 200 - 30 + 4 = 174_{10}.$$

Представьте номер текущего года в квазидесятичной записи. *Достаточно привести один пример и показать, что он подходит.*

3. В школе ровно половина учеников учится в первую смену, остальные учатся во вторую смену. 80% всех девочек учатся в первую смену. 70% всех мальчиков учатся во вторую смену. Какой процент среди учеников первой смены составляют мальчики? *Обоснуйте свой ответ.*

4. Четыре автомобиля едут по одной и той же дороге, в одном и том же направлении, но с разными постоянными скоростями. Всего существует 24 способа расположить четыре машины друг за другом. Какое наибольшее количество из этих способов может реально случиться в течение этой поездки? *Обоснуйте свой ответ.*

5. В четырехугольнике $ABCD$ известно, что $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 150^\circ$ и $AB = 2BC$. Пусть K — точка пересечения прямой BC и перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую CD . Докажите, что $DK \parallel AB$.

6. При каком наименьшем натуральном n дробь

$$\frac{26 \cdot 27 \cdot \dots \cdot (26 + n)}{26 \cdot 25 \cdot \dots \cdot (26 - n)}$$

будет целой? *Обоснуйте свой ответ.*