

## 7-я Межрегиональная олимпиада для учителей по математике Казань, 25.04.2021

*Уважаемые участники!*

Свои вопросы Вы можете задать по электронному адресу [kazan-mat@mail.ru](mailto:kazan-mat@mail.ru). Общие комментарии по задачам смотрите на странице <http://www.kazan-math.info>. На этой же странице Вы найдете ссылку на форму для вбивания ответов. Для Вашего удобства предлагается решить задачи, перенести ответы себе на черновик и затем по черновику заполнить форму для ответов. Правильный ответ оценивается в 2 балла, неправильный — в 0 баллов, ответ «не знаю» оценивается в 1 балл. Напоминаем, что возможность отправить ответы закроется в 13:00 по Московскому времени.

*Желаем успеха!*

1. а) Поезд проехал половину пути за 3 часа, после чего увеличил скорость в полтора раза. На вторую половину пути он затратил

(I) 2 часа; (II) 3 часа; (III) 4,5 часа; (IV) эта ситуация невозможна; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

б) Поезд ехал половину пути со скоростью 60 км/ч, а половину времени — со скоростью 40 км/ч. Остальное время он двигался со скоростью 20 км/ч. Его средняя скорость равна

(I) 40 км/ч; (II) 45 км/ч; (III) 50 км/ч; (IV) эта ситуация невозможна; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

в) Поезд ехал половину пути со скоростью 40 км/ч, а половину времени — со скоростью 60 км/ч. Остальное время он двигался со скоростью 20 км/ч. Его средняя скорость равна

(I) 40 км/ч; (II) 45 км/ч; (III) 50 км/ч; (IV) эта ситуация невозможна; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

г) Поезд ехал половину пути со скоростью  $v_1$  км/ч, а половину времени — со скоростью  $v_2$  км/ч. При каком условии на  $v_1, v_2$  это возможно?

(I) ни при каких  $v_1, v_2$ ; (II) только при  $v_1 = v_2$ ; (III) только при  $v_1 \geq v_2$ ; (IV) только при  $v_1 \leq v_2$ ; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

2. а) Имеется забор длиной 88 метра. Можно ли с его помощью оградить участок прямоугольной формы площадью 480 м<sup>2</sup>?

(I) да; (II) нет; (III) невозможно определить однозначно; (IV) среди приведённых ответов нет правильного; (V) не знаю.

б) Какова наибольшая площадь участка прямоугольной формы, который можно оградить забором длиной 88 метра?

(I) 480; (II) 482; (III) 484; (IV) среди приведённых ответов нет правильного; (V) не знаю.

в) Какова наименьшая длина забора, с помощью которого можно оградить участок прямоугольной формы площадью 400 м<sup>2</sup>?

(I) 100; (II) 40; (III) 80; (IV) среди приведённых ответов нет правильного; (V) не знаю.

г) Имеется забор длиной 88 метра. Можно ли с его помощью оградить участок площадью более 600 м<sup>2</sup> необязательно прямоугольной формы?

(I) да; (II) нет; (III) среди приведённых ответов нет правильного; (IV) не знаю.

3. У Пети есть кубики одинаковой формы разного цвета: 2 красных, 3 синих и 4 зелёных. Петя строит из них башню, ставя каждый следующий кубик на предыдущий.

а) Сколько различных башен высотой 2 кубика может построить Петя?

(I) 8; (II) 9; (III) 36; (IV) среди приведённых ответов нет правильного; (V) не знаю.

б) Сколько различных башен высотой 3 кубика может построить Петя?

(I) 84; (II) 18; (III) 26; (IV) среди приведённых ответов нет правильного; (V) не знаю.

в) Сколько различных башен высотой 9 кубиков может построить Петя?

(I) 1260; (II) 120960; (III) 362880; (IV) среди приведённых ответов нет правильного; (V) не знаю.

г) Сколько различных башен высотой 8 кубиков может построить Петя? (Один кубик не будет использоваться.)

(I) 1260; (II) 40320; (III) 13440; (IV) среди приведённых ответов нет правильного; (V) не знаю.

4. Дан набор попарно различных целых чисел. Каждое из чисел набора является суммой каких-то двух других чисел, входящих в этот набор.

а) Какое наименьшее возможное количество *положительных* чисел может быть в таком наборе?

(I) 1; (II) 2; (III) 3; (IV) 4; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

б) В наборе 10 чисел. Какое наибольшее возможное количество *положительных* чисел может быть в этом наборе?

(I) 9; (II) 8; (III) 7; (IV) 5; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

в) Какое наименьшее возможное количество чисел может быть *во всём* наборе?

(I) 7; (II) 6; (III) 5; (IV) 4; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

г) Одно из чисел набора равно 0. Какое наименьшее количество чисел в таком наборе?

(I) 7; (II) 6; (III) 5; (IV) 4; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

5. Дан выпуклый четырёхугольник  $ABCD$ . Медианы треугольников  $ABC$ ,  $BCD$  и  $ADC$  пересекаются в точках  $K$ ,  $L$  и  $M$  соответственно.

а) Найдите отношение  $BD : KM$ .

(I) 2 : 1; (II) 3 : 1; (III) 4 : 1; (IV) среди приведённых ответов нет правильного; (V) не знаю.

б) Отрезки  $BM$  и  $DK$  пересекаются в точке  $O$ . Найдите отношение площадей треугольников  $BOD$  и  $KOM$ .

(I) 9 : 4; (II) 4 : 1; (III) 9 : 1; (IV) среди приведённых ответов нет правильного; (V) не знаю.

в) Найдите отношение  $AD : KL$ .

(I) 2 : 1; (II) 3 : 1; (III) 4 : 1; (IV) среди приведённых ответов нет правильного; (V) не знаю.

г) Отрезки  $AL$  и  $DK$  пересекаются в точке  $P$ . Найдите отношение  $AP : PL$ .

(I) 2 : 1; (II) 3 : 1; (III) 4 : 1; (IV) среди приведённых ответов нет правильного; (V) не знаю.

6. Функция  $f$  такова, что для любых положительных  $x$  и  $y$  выполняется равенство  $f(xy) = f(x) + f(y)$ .

а) Чему равно значение  $f(1)$ ?

(I) 0; (II) 1; (III) невозможно определить; (IV) среди приведённых ответов нет правильного; (V) не знаю.

б) Существует ровно одна функция  $f$ , удовлетворяющая условиям задачи?

(I) да, верно; (II) нет ни одной такой функции  $f$ ; (III) таких функций  $f$  бесконечно много; (IV) среди приведённых ответов нет правильного; (V) не знаю.

в) Известно, что  $f(2021) = 1$ . Чему равно значение  $f\left(\frac{1}{2021}\right)$ ?

(I) 0; (II) 1; (III)  $-1$ ; (IV) среди приведённых ответов нет правильного; (V) не знаю.

г) Может ли равенство  $f(x) = -f(x^{-1}) + 1$  выполняться хотя бы для одного положительного  $x$ ?

(I) да, может; (II) нет, не может; (III) среди приведённых ответов нет правильного; (IV) не знаю.

7. а) Максимум функции  $\cos x + \sin x$  равен:

(I) 2; (II)  $\sqrt{3}$ ; (III)  $\sqrt{2}$ ; (IV) среди приведённых ответов нет правильного; (V) не знаю.

б) Пусть  $a = \max(2 \cos x + \sin x)$ ,  $b = \min(\cos x - 2 \sin x)$ . Какое из утверждений верно?

(I)  $a = b$ ; (II)  $a = -b$ ; (III)  $|a| > |b|$ ; (IV)  $|a| < |b|$ ; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

в) Максимум функции  $f(x) = 7 \cos x + 3 \cos 3x$  равен

(I) 4; (II) 10; (III)  $\frac{64}{9}$ ; (IV)  $\sqrt{58}$ ; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

г) Максимум функции  $f(x) = 7 \cos x - 3 \cos 3x$  равен

(I) 4; (II) 10; (III)  $\frac{64}{9}$ ; (IV)  $\sqrt{58}$ ; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

8. При исследовании крови у 6% здоровых пациентов анализ показывает наличие антител (ложноположительный анализ, ошибка 1 рода), у 4% переболевших антитела не обнаруживаются (ложноотрицательный анализ, ошибка 2 рода).

а) Пусть в популяции переболел один на каждую сотню человек. Какова вероятность того, что у произвольного человека при обследовании не будут обнаружены антитела? (Округлите до целого числа процентов.)

(I) 93%; (II) 94%; (III) 96%; (IV) 99%; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

б) Пусть в популяции переболели 10 на каждую сотню человек. Какова вероятность того, что у произвольного человека при обследовании будут обнаружены антитела?

(I) 4%; (II) 6%; (III) 10%; (IV) 15%; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

Назовем *надежностью анализа* долю переболевших среди тех, у кого анализ показал наличие антител.

в) Пусть в популяции переболели 10 на каждую сотню человек. Какова надежность анализа в этом случае?

(I) 64%; (II) 85%; (III) 94%; (IV) 96%; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

г) При каком числе переболевших надежность анализа равна 0,8? (В расчете на сотню человек, округлите до целого числа.)

(I) 12; (II) 20; (III) 80; (IV) 83; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

9. В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$  провели биссектрисы всех его внутренних углов и подсчитали точки, в которых они пересекаются (возможно, вне четырёхугольника).

а) Оказалось, что все биссектрисы пересекаются в одной точке. Этот четырёхугольник

(I) обязательно квадрат; (II) обязательно ромб; (III) обязательно имеет параллельные стороны; (IV) эта ситуация невозможна; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

б) Оказалось, что все биссектрисы пересекаются в точке  $O$ . Какое из утверждений верно для каждого такого четырёхугольника:

(I)  $AC + BD = AO + BO + CO + DO$ ; (II)  $AB + AD = BC + BD$ ; (III)  $AB + CD = AC + BD$ ; (IV) эта ситуация невозможна; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

в) Оказалось, что точек пересечения биссектрис ровно две. Какое из утверждений верно:

(I) четырёхугольник является параллелограммом; (II) четырёхугольник является трапецией; (III) четырёхугольник является ромбом; (IV) эта ситуация невозможна; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

г) Оказалось, что точек пересечения биссектрис ровно четыре. Какое из утверждений верно:

(I) четырёхугольник является параллелограммом; (II) четырёхугольник является трапецией; (III) четырёхугольник является ромбом; (IV) эта ситуация невозможна; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

10. В заданиях а)–в) рассматриваются тетраэдры, у которых площадь основания равна 30, а все боковые грани образуют углы  $60^\circ$  с основанием.

а) Площадь полной поверхности такого тетраэдра равна

(I) 60; (II) 90; (III)  $15\sqrt{3}$ ; (IV)  $30 + 15\sqrt{3}$ ; (V) недостаточно данных для решения задачи; (VI) не знаю.

б) Пусть периметр основания равен  $20\sqrt{3}$ . Высота тетраэдра равна:

(I)  $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ ; (II) 3; (III) 1,5; (IV) эта ситуация невозможна; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

в) Пусть высота тетраэдра равна 10. Его объём равен

(I) 100; (II)  $30\sqrt{3}$ ; (III)  $15\sqrt{3}$ ; (IV) эта ситуация невозможна; (V) среди приведённых ответов нет правильного; (VI) не знаю.

г) У тетраэдра  $ABCD$  боковые грани наклонены под углом  $30^\circ$  к плоскости основания  $ABC$ . Площадь основания тетраэдра равна 30. Площадь полной поверхности тетраэдра равна

(I) 60; (II) 90; (III)  $15\sqrt{3}$ ; (IV)  $30 + 15\sqrt{3}$ ; (V) недостаточно данных для решения задачи; (VI) не знаю.