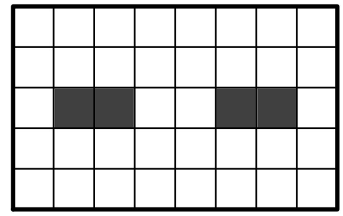
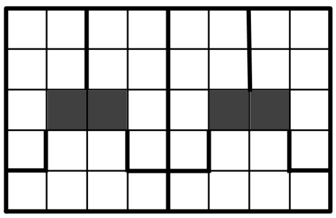
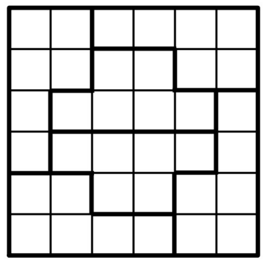
Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан
6 класс, финальный тур. 28 января 2023 года. Решения задач



1. Разрежьте прямоугольник 5×8 с дырками (см. рисунок) на шесть клетчатых фигурок равной площади и сложите из них квадрат 6×6. *В решении необходимо привести две картинки — как разрезать и как сложить.*

Решение. Можно, например, так:





2. В школьной олимпиаде по математике участвовало 60 человек, по физике — 50, по информатике — 40, а по русскому языку — 30. Составили четыре списка: тех, кто участвовал ровно в одной из олимпиад, ровно в двух, ровно в трех и ровно в четырех. Во всех списках оказалось одно и то же число людей. Сколько человек в каждом списке? *Обоснуйте свой ответ.*

Ответ. 18.

Решение. Пусть в каждом списке по x человек. Если сложить количества детей, участвовавших во всех четырех олимпиадах, то люди из первого списка будут учтены по одному разу, из второго — по два раза, из третьего — по три, а из четвертого — по четыре. Получаем уравнение $x + 2x + 3x + 4x = 30 + 40 + 50 + 60$, откуда $10x = 180$, поэтому $x = 18$.

Замечание. Показывать, что существует распределение этих детей по четырем спискам по 18 человек в каждом, в задаче не требуется. Тем не менее, это нетрудно сделать.

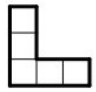
3. За круглым столом сидели четыре человека. Химик сидел напротив Манина, рядом с историком. Математик сидел рядом с Поповым. Соседи Зайцева — Соловьёв и физик. **а)** Какая профессия у Манина? **б)** Восстановите все фамилии и профессии. *Обоснуйте свой ответ.*

Ответ. а) Математик.

б) Математик Манин, физик Попов, химик Зайцев, историк Соловьёв.

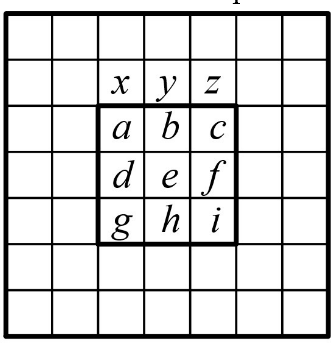
Решение. Манин не может быть ни химиком (так как сидел напротив), ни историком (с которым сидел рядом). Значит, он либо физик, либо математик. Если Манин — физик, то Зайцев сидел между физиком Маниным и химиком Соловьёвым. Но тогда математик не может сидеть рядом с Поповым — противоречие. Следовательно, Манин — математик.

После этого физик — не Зайцев, не Соловьёв и не Манин. Поэтому физик — Попов. Рядом с Зайцевым нет Манина, следовательно, Зайцев сидит напротив Манина, поэтому он — химик. Тогда Соловьёв — историк, и сидят они в таком порядке: математик Манин, физик Попов, химик Зайцев и историк Соловьёв.

4. В какое наименьшее количество цветов нужно раскрасить клетки квадрата 7×7 так, чтобы в любой фигурке вида  все клетки были разных цветов? Фигурка может быть расположена по клеткам как угодно. *Обоснуйте свой ответ.*

Ответ. 9.

Решение. *Оценка.* Докажем, что в центральном квадрате 3×3 все девять клеток — разноцветные. Его клетки бывают трех типов — четыре угловые, центральная и четыре клетки, прилегающих к стороне. Назовем их *средними.*



Покажем, что любая угловая клетка не совпадает по цвету с остальными восемью. Выберем клетку a. Фигурки $adghi$ и $abcfi$ покрывают все клетки, кроме e, а ее покрывает фигурка $xadef$.

Покажем, что любая средняя клетка не совпадает по цвету с остальными восемью. Выберем клетку d. С угловыми она уже совпадать не может. С клетками b и h тоже — их покрывают фигурки $gdabc$ и $adghi$ соответственно. Клетки e и f покрываются фигуркой $xadef$. Центральная клетка всего одна и она уже не может совпадать по цвету ни с одной из остальных восьми.

Пример. Раскрасить клетки квадрата 7×7 в 9 цветов можно, например, так, как показано на рисунке. Любые две одноцветные клетки лежат либо на одной горизонтали, либо на одной вертикали, и отстоят друг от друга как минимум на две позиции, поэтому не накрываются одной фигуркой.

1	2	3	1	2	3	1
4	5	6	4	5	6	4
7	8	9	7	8	9	7
1	2	3	1	2	3	1
4	5	6	4	5	6	4
7	8	9	7	8	9	7
1	2	3	1	2	3	1

5. На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 100. Аня стирает их по одному в любом порядке. Докажите, что она может делать это в таком порядке, чтобы сумма нестертых чисел на доске всегда была составным числом. Число называется *составным*, если у него есть хотя бы один делитель, отличный от единицы и самого числа.

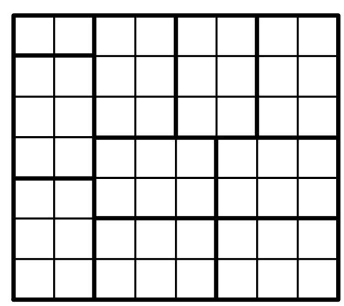
Решение. Заметим, что сумма $1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ — составное число при $n > 2$ (этой формулой можно пользоваться при решении). Поэтому будем вычеркивать каждый раз самое большое число, пока не останутся числа 1, 2, 3 и 4. Далее вычеркнем по порядку числа 1, 3 и 2, оставляя соответственно суммы 9, 6 и 4.

Второе решение. Существует решение, не использующее формулу для суммы первых n натуральных чисел. Заметим, что сумма всех 100 чисел делится на 10 (они разбиваются на десять десятков, в которых последние цифры одни и те же, следовательно, последняя цифра суммы — это последняя цифра суммы $1 + 2 + \ldots + 9$, посчитанная 10 раз). Теперь в каждом десятке проделаем следующую операцию: последовательно вычеркнем числа, оканчивающиеся на 2, 3, 1, 4, а потом на 6, 9, 7, 8. Тогда после нечетного числа вычеркиваний будет оставаться четная сумма, а после четного — сумма, кратная 5. Проделав такие восемь операций с каждым десятком, мы оставим только числа, кратные 5. Следующим шагом сразу вычеркнем число 5, а после этого будем вычеркивать числа в произвольном порядке. Каждый раз будет оставаться сумма, кратная 5, и при этом большая 5.

6. В начале игры есть пустая клетчатая доска 7×8. Паша и Вова ходят по очереди, первым ходит Паша. За один ход Паша ставит по одной фишке в любые две пустые клетки, имеющие *хотя бы одну общую вершину*, а Вова ставит фишку в любую пустую клетку. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может гарантированно выиграть вне зависимости от игры другого? *Обоснуйте свой ответ.*

Ответ. Паша.

Решение. Доску 7×8 нетрудно разбить на один прямоугольник 1×2 (доминошку) и 18 трехклеточных «уголков». Например, можно разбить ее на девять прямоугольников 2×3 и доминошку (см. рисунок), а затем каждый прямоугольник разрезать на два уголка.



Паша зафиксирует такое разбиение и первым ходом поставит обе фишки в доминошку. Следующие ходы он будет делать в тот же уголок, куда предыдущим ходом поставил свою фишку Вова. Поскольку любые две клетки в уголке имеют общую вершину, такой ход возможен. Тем самым, своим 19-м ходом Паша закроет последние две клетки в прямоугольнике 7×8 и Вове будет некуда ходить.