

Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан

7 класс, финальный тур. 28 января 2023 года

Время выполнения заданий — 180 минут

Максимальный балл — 42

Предварительные результаты будут опубликованы 10 февраля. Заявления на апелляцию принимаются до 22.00 14 февраля. Подробности на сайте kazan-math.com. Условия задач можно забрать с собой.

1. Аня подставила в выражение $(x - 2)(x + *)$ вместо звездочки целое число, раскрыла скобки и привела подобные слагаемые. Оказалось, что какие-то два коэффициента при степенях x отличаются ровно в два раза. Свободный член (слагаемое, не содержащее x) тоже является коэффициентом. Какое число могла подставить Аня? *Найдите все ответы и объясните, почему другие невозможны.*

2. По кругу стоят 50 человек, каждый из которых является или рыцарем, или лжецом (рыцари всегда говорят правду, лжецы — всегда врут). Мог ли каждый из них сказать фразу: «Количество рыцарей среди ближайших трех человек против часовой стрелки от меня больше, чем количество лжецов среди ближайших трех человек по часовой стрелке от меня», если известно, что среди них есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец? *Обоснуйте свой ответ.*

3. На столе в ряд стоят 6 красных, 8 зеленых и 10 синих стаканов. Известно, что все стаканы одного цвета или пустые, или заполнены чаем. Петя прошел вдоль этого ряда и наливал чай в каждый пустой стакан, и, наоборот, выпивал каждый полный. После него Вася так же прошелся вдоль этого ряда, наливая каждый пустой стакан и выпивая каждый полный. Петя потратил на свои действия ровно один час, а Вася на свои потратил больше 80 минут. Известно, что мальчики наливают чай с одинаковой скоростью, а пьют чай в два раза дольше, чем его наливают. Сколько времени требуется им, чтобы налить один стакан чая? *Укажите все ответы и объясните, почему других нет.*

4. У Дамира есть 50 внешне неотличимых гирь, которые весят 1 г, 2 г, 3 г, ..., 50 г соответственно. Еще у него есть специальные весы, которые за одно взвешивание позволяют узнать суммарный вес любых k гирь. Докажите, что для любого натурального $k < 50$ Дамир сможет узнать вес всех гирь за 49 взвешиваний.

5. Дан равнобедренный треугольник ABC с углом при вершине B , равным 96° . Точка O внутри треугольника ABC такова, что $\angle OCA = 30^\circ$, а $\angle OAC = 18^\circ$. Найдите величину угла $\angle BOC$. *Обоснуйте свой ответ.*

6. *Хромая ладья* за один ход может перейти из клетки, в которой стоит, только в любую соседнюю по стороне клетку. Хромая ладья обошла доску 30×30 и вернулась на первоначальную клетку, побывав в каждой клетке доски ровно по одному разу (а в начальной — два раза). Клетки вдоль пути были покрашены в три цвета по циклу: 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, Могли ли все клетки на диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний, быть покрашены в первый цвет? *Обоснуйте свой ответ.*

Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан

7 класс, финальный тур. 28 января 2023 года

Время выполнения заданий — 180 минут

Максимальный балл — 42

Предварительные результаты будут опубликованы 10 февраля. Заявления на апелляцию принимаются до 22.00 14 февраля. Подробности на сайте kazan-math.com. Условия задач можно забрать с собой.

1. Аня подставила в выражение $(x - 2)(x + *)$ вместо звездочки целое число, раскрыла скобки и привела подобные слагаемые. Оказалось, что какие-то два коэффициента при степенях x отличаются ровно в два раза. Свободный член (слагаемое, не содержащее x) тоже является коэффициентом. Какое число могла подставить Аня? *Найдите все ответы и объясните, почему другие невозможны.*

2. По кругу стоят 50 человек, каждый из которых является или рыцарем, или лжецом (рыцари всегда говорят правду, лжецы — всегда врут). Мог ли каждый из них сказать фразу: «Количество рыцарей среди ближайших трех человек против часовой стрелки от меня больше, чем количество лжецов среди ближайших трех человек по часовой стрелке от меня», если известно, что среди них есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец? *Обоснуйте свой ответ.*

3. На столе в ряд стоят 6 красных, 8 зеленых и 10 синих стаканов. Известно, что все стаканы одного цвета или пустые, или заполнены чаем. Петя прошел вдоль этого ряда и наливал чай в каждый пустой стакан, и, наоборот, выпивал каждый полный. После него Вася так же прошелся вдоль этого ряда, наливая каждый пустой стакан и выпивая каждый полный. Петя потратил на свои действия ровно один час, а Вася на свои потратил больше 80 минут. Известно, что мальчики наливают чай с одинаковой скоростью, а пьют чай в два раза дольше, чем его наливают. Сколько времени требуется им, чтобы налить один стакан чая? *Укажите все ответы и объясните, почему других нет.*

4. У Дамира есть 50 внешне неотличимых гирь, которые весят 1 г, 2 г, 3 г, ..., 50 г соответственно. Еще у него есть специальные весы, которые за одно взвешивание позволяют узнать суммарный вес любых k гирь. Докажите, что для любого натурального $k < 50$ Дамир сможет узнать вес всех гирь за 49 взвешиваний.

5. Дан равнобедренный треугольник ABC с углом при вершине B , равным 96° . Точка O внутри треугольника ABC такова, что $\angle OCA = 30^\circ$, а $\angle OAC = 18^\circ$. Найдите величину угла $\angle BOC$. *Обоснуйте свой ответ.*

6. *Хромая ладья* за один ход может перейти из клетки, в которой стоит, только в любую соседнюю по стороне клетку. Хромая ладья обошла доску 30×30 и вернулась на первоначальную клетку, побывав в каждой клетке доски ровно по одному разу (а в начальной — два раза). Клетки вдоль пути были покрашены в три цвета по циклу: 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, Могли ли все клетки на диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний, быть покрашены в первый цвет? *Обоснуйте свой ответ.*