Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан
5 класс, финальный тур. 12 февраля 2022 года. Решения задач

1. В клетки квадрата 3×3 расставьте цифры от 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Каждую цифру, кроме одной, ровно по одному разу, а какую-то одну цифру нужно использовать два раза. Сумма цифр во всех строках и столбцах должна быть одинаковой.

Решение. Пример расстановки, где цифра 3 использована дважды, на рисунке. Возможен еще вариант, где дважды использована цифра 6.

8	1	4
3	7	3
2	5	6

2. Альберт и 13 его друзей пришли на региональный этап олимпиады по математике, где предлагалось решить 6 задач. Каждый из друзей Альберта решил по 4 задачи. Сколько задач решил Альберт, если известно, что каждую задачу решило ровно 9 человек?

Ответ. Альберт решил 2 задачи.

Решение. Каждую из 6 задач решило 9 человек, следовательно, всего было 54 решения, а так как каждый из 13 друзей Альберта решил по 4 задачи, то они написали вместе 52 решения. Поэтому оставшиеся два решения написал Альберт.

3. В трех сундуках находятся 70, 82 и 97 золотых монет. В одном из них одна монета фальшивая (она отличается по весу от настоящей, но на вид ее отличить невозможно). Как за одно взвешивание на чашечных весах определить сундук, в котором все монеты настоящие?

Решение. Положим на одну чашу весов все 70 монет из первого сундука, а на другую — 70 монет из второго. Если весы будут в равновесии, то первый сундук искомый. Если чаши не равны, то нужный нам — третий сундук.

4. Забывчивый Вася забыл код от домофона, но знает, что это двузначное число, про которое он помнит 2 факта:

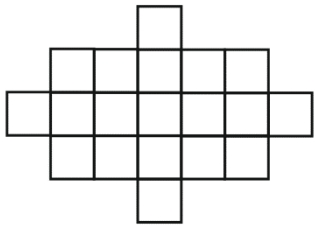
1) То ли если прибавить к нему 8 оно будет делиться на 9, то ли если прибавить к нему 9 оно будет делиться на 8.
2) То ли если отнять от него 8 оно будет делиться на 9, то ли если отнять от него 9 оно будет делиться на 8.

Какой может быть код от домофона?

Ответ. 71 или 73.

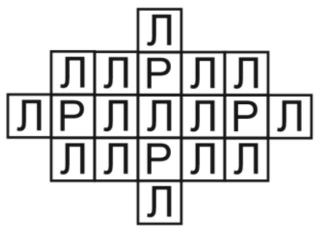
Решение. Пусть x — двузначное число, код домофона. Тогда мы знаем, что $x+8$ делится на 9 или $x+9$ делится на 8. А также $x–8$ делится на 9 или $x–9$ делится на 8. $x+8$ и $x–8$ одновременно делится на 9 не могут, так как разность этих чисел равна 16, а 16 не делится на 9. Аналогично одновременно не могут делится на 8 числа $x+9$ и $x–9$.
Возможны два случая: 1) $x+8$ делится на 9, а $x–9$ делится на 8; 2) $x+9$ делится на 8, а $x–8$ делится на 9. Таким образом, нам нужно найти пару чисел от 1 до 108 (т.к. x — двузначное), отличающихся на 17, одно из которых делится на 8, а другое на 9. Выпишем числа, делящиеся на 8: 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96, 104; и делящиеся на 9: 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, 108. Сравнивая эти числа, получаем, что подходят две пары: 63 и 80; 64 и 81. Откуда находим $x = 71$ или $x = 73$.

5. В каждой клетке комнаты, схема которой изображена на рисунке, стоит рыцарь или лжец. Каждый сказал: «во всех соседних со мной по стороне клетках стоят лжецы». Какое наименьшее число рыцарей могло быть?



Ответ. 4 рыцаря.

Решение. *Оценка.* Рассмотрим 4 выступающие клетки и соседние с ними. В каждой такой паре не может стоять два лжеца, так как в этом случае лжец из выступающей клетки сказал бы правду, рядом с ним только одна клетка, в которой стоит лжец. Значит в каждой такой паре должен быть хотя бы один рыцарь. *Пример* расстановки с 4 рыцарями приведен на рисунке. Нетрудно убедиться, что он подходит под условия задачи.



6. Белка положила по одному орешку на какие-то 2 клетки доски 8×8. Затем каждую минуту она выбирает или одну строку, или один столбец, или квадрат 2×2 и добавляет по одному орешку в каждую клетку выбранной фигуры. Может ли через некоторое время во всех клетках оказаться поровну орешков?

Ответ. Не может.

Решение. Если белка выбирает строку или столбец, то она добавляет по 8 орехов, а если квадрат 2×2 – то 4 ореха. В каждом случае она добавляет число, кратное четырем. С учетом того, что сначала на доске было 2 ореха, количество орехов никогда не станет кратным 4. А если бы во всех клетках орехов стало поровну, то общее число орехов делилось бы на 8. Противоречие.