7-я Межрегиональная олимпиада для учителей по математике Казань, 3.10.2021

Уважаемые участники!

Свои вопросы Вы можете задать по электронному адресу kazan-mat@mail.ru. Общие комментарии по задачам смотрите на странице http://www.kazan-math.com. На этой же странице Вы найдете ссылку на форму для вбивания ответов. Для Вашего удобства предлагается решить задачи, перенести ответы себе на черновик и затем по черновику заполнить форму для ответов. Правильный ответ оценивается в 2 балла, неправильный — в 0 баллов, ответ «не знаю» оценивается в 1 балл. Напоминаем, что возможность отправить ответы закроется в 18:00 по Московскому времени.

Желаем успеха!

1. В двух 10-литровых сосудах находится раствор соли. В первом — 3 литра 5%-го раствора, во втором — 5 литров 13%-го.

а) Если оба раствора слить в одну банку, то концентрация полученного раствора равна (округлите до целого числа процентов)

(I) 8%; **(II)** 9%; **(III)** 10%; **(IV)** 11%; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

б) Сколько раствора надо перелить из второй банки в первую, чтобы получить в ней концентрацию соли 7%?

(I) 1 *л*; **(II)** 1,5 *л*; **(III)** 2 *л*; **(IV)** эта ситуация невозможна; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

в) Из второй банки в первую переливаем 1 *л* раствора, перемешиваем и переливаем 1 *л* новой смеси обратно. Какова будет концентрация раствора во второй банке?

(I) 11%; **(II)** 11,5%; **(III)** 11,8%; **(IV)** 12%; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

г) Сколько раз надо повторять переливания из второй банки в первую и обратно, чтобы получить во второй банке 5 *л* раствора с концентрацией 9% соли? (В ответе укажите число пар переливаний.)

(I) 2; **(II)** 3; **(III)** не менее 4; **(IV)** эта ситуация невозможна; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

2. *а*) Имеется забор длиной 72 метра. Можно ли с его помощью оградить участок прямоугольной формы площадью 320 $м^2$?

(I) да; **(II)** нет; **(III)** невозможно определить однозначно; **(IV)** среди приведённых ответов нет правильного; **(V)** не знаю.

б) Какова наибольшая площадь участка прямоугольной формы, который можно оградить забором длиной 72 метра?

(I) 320; **(II)** 322; **(III)** 324; **(IV)** среди приведённых ответов нет правильного; **(V)** не знаю.

в) Какова наименьшая длина забора, с помощью которого можно оградить участок прямоугольной формы площадью 900 $м^2$?

(I) 130; **(II)** 110; **(III)** 120; **(IV)** среди приведённых ответов нет правильного; **(V)** не знаю.

г) Имеется забор длиной 72 метра. Можно ли с его помощью оградить участок площадью более 400 *м*^{2} необязательно прямоугольной формы?

(I) *да*; **(II)** *нет*; **(III)** среди приведённых ответов нет правильного; **(IV)** не знаю.

3. У Пети есть кубики одинаковой формы разного цвета: 2 красных, 4 синих и 6 зелёных. Петя строит из них башню, ставя каждый следующий кубик на предыдущий.

а) Сколько различных башен высотой 2 кубика может построить Петя?

(I) 8; **(II)** 9; **(III)** 66; **(IV)** среди приведённых ответов нет правильного; **(V)** не знаю.

б) Сколько различных башен высотой 3 кубика может построить Петя?

(I) 84; **(II)** 26; **(III)** 18; **(IV)** среди приведённых ответов нет правильного; **(V)** не знаю.

в) Сколько различных башен высотой 12 кубиков может построить Петя?

(I) 13 860; **(II)** 34 560; **(III)** 479 001 600; **(IV)** среди приведённых ответов нет правильного; **(V)** не знаю.

г) Сколько различных башен высотой 11 кубиков может построить Петя? (Один кубик не будет использоваться.)

(I) 13860; **(II)** 31 680; **(III)** 39 916 800; **(IV)** среди приведённых ответов нет правильного; **(V)** не знаю.

4. Дан набор попарно различных целых чисел. Каждое из чисел набора является суммой каких-то двух других чисел, входящих в этот набор.

а) Какое наименьшее возможное количество *отрицательных* чисел может быть в таком наборе?

(I) 1; **(II)** 2; **(III)** 3; **(IV)** 4; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

б) В наборе 10 чисел. Какое наибольшее возможное количество *отрицательных* чисел может быть в этом наборе?

(I) 9; **(II)** 8; **(III)** 7; **(IV)** 5; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

в) Какое наименьшее возможное количество чисел может быть *во всём* наборе?

(I) 7; **(II)** 6; **(III)** 5; **(IV)** 4; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

г) Два числа из набора известны — 0 и 4. Какое наименьшее количество чисел в таком наборе?

(I) 7; **(II)** 6; **(III)** 5; **(IV)** 4; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

5. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Медианы треугольников ABC, BCD и CDE пересекаются в точках M_1, M_2 и M_3 соответственно. Точки N_1, N_2 и N_3 — середины сторон AB, AE и ED соответственно.

а) Найдите отношение $M_1M_3 : N_1N_3$.

(I) 1 : 2; **(II)** 2 : 3; **(III)** 3 : 4; **(IV)** среди приведённых ответов нет правильного; **(V)** не знаю.

б) Отрезки M_1N_3 и M_3N_1 пересекаются в точке K. Найдите отношение площадей треугольников M_1KN_1 и M_3KN_3.

(I) 3 : 4; **(II)** 2 : 3; **(III)** 1 : 1; **(IV)** среди приведённых ответов нет правильного; **(V)** не знаю.

в) Найдите отношение $M_1M_2 : N_2N_3$.

(I) 1 : 2; **(II)** 2 : 3; **(III)** 3 : 4; **(IV)** среди приведённых ответов нет правильного; **(V)** не знаю.

г) Отрезки M_1N_3 и M_2N_2 пересекаются в точке O. Найдите отношение площадей треугольников OM_1M_2 и ON_2N_3.

(I) 2 : 3; **(II)** 3 : 4; **(III)** 4 : 9; **(IV)** среди приведённых ответов нет правильного; **(V)** не знаю.

6. Функция f такова, что для любых положительных x и y выполняется равенство $f(x/y) = f(x) - f(y)$.

а) Чему равно значение $f(1)$?

(I) 0; **(II)** 1; **(III)** невозможно определить; **(IV)** среди приведённых ответов нет правильного; **(V)** не знаю.

б) Существует ровно одна функция f, удовлетворяющая условиям задачи?

(I) да, верно; **(II)** нет ни одной такой функции f; **(III)** таких функций f бесконечно много; **(IV)** среди приведённых ответов нет правильного; **(V)** не знаю.

в) Известно, что $f(2021) = -1$. Чему равно значение $f\left(\frac{1}{2021}\right)$?

(I) 0; **(II)** 1; **(III)** -1; **(IV)** среди приведённых ответов нет правильного; **(V)** не знаю.

г) Может ли равенство $f(x) \cdot f(x^{-1}) = 1$ выполняться хотя бы для одного положительного x?

(I) да, может; **(II)** нет, не может; **(III)** среди приведённых ответов нет правильного; **(IV)** не знаю.

7. *а*) Максимум функции $\ln\cos x + \ln\sin x$ равен:

(I) 0; **(II)** $\ln 2$; **(III)** $-\ln 2$; **(IV)** он не существует; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

б) Минимум функции $\ln\cos x + \ln\sin x$ равен:

(I) 0; **(II)** $\ln 2$; **(III)** $-\ln 2$; **(IV)** он не существует; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

в) Функция $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$ является

(I) чётной; **(II)** нечётной; **(III)** ни чётной, ни нечётной; **(IV)** среди приведённых ответов нет правильного; **(V)** не знаю.

г) Функция $g(x) = (\sin 2x + \cos 2x + 1)(\sin x - \cos x)$ является

(I) чётной; **(II)** нечётной; **(III)** ни чётной, ни нечётной; **(IV)** среди приведённых ответов нет правильного; **(V)** не знаю.

8. Одним выстрелом стрелок попадает в мишень с вероятностью $p = 0,8$. Он стрелял дважды.

а) Какова вероятность, что мишень была поражена? (То есть в нее попали хотя бы один раз.)

(I) 32%; **(II)** 64%; **(III)** 80%; **(IV)** 96%; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

б) Какова вероятность, что мишень была поражена ровно один раз?

(I) 16%; **(II)** 32%; **(III)** 64%; **(IV)** 80%; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

в) Какова вероятность того, что стрелок не попал в мишень ни разу за два выстрела, если известно, что хотя бы один раз он промахнулся?

(I) $0,04$; **(II)** $0,2$; **(III)** $1/9$; **(IV)** $8/9$; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

г) При каком значении p вероятность попасть ровно один раз совпадает с вероятностью попасть оба раза?

(I) $1/3$; **(II)** $1/2$; **(III)** $2/3$; **(IV)** $3/4$; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

9. В треугольнике ABC отрезок BK делит его на два неравных равнобедренных треугольника.

а) Пусть BK — медиана треугольника ABC. Тогда треугольник ABC обязательно

(I) равносторонний; **(II)** равнобедренный; **(III)** прямоугольный; **(IV)** эта ситуация невозможна; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

б) Пусть BK — биссектриса треугольника ABC. Тогда треугольник ABC обязательно

(I) равносторонний; **(II)** равнобедренный; **(III)** прямоугольный; **(IV)** эта ситуация невозможна; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

в) Треугольники ABK и BKC подобны. Тогда треугольник ABC обязательно

(I) равносторонний; **(II)** равнобедренный; **(III)** прямоугольный; **(IV)** эта ситуация невозможна; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

г) Треугольник ABC — равнобедренный, $AB = 1$. Количество таких треугольников

(I) один; **(II)** два; **(III)** три; **(IV)** таких треугольников нет; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

10. В заданиях *а*)–*в*) рассматриваются тетраэдры, у которых площадь основания равна 12, а все боковые грани образуют углы 30° с основанием.

а) Площадь боковой поверхности такого тетраэдра равна

(I) 6; **(II)** $6\sqrt{3}$; **(III)** $8\sqrt{3}$; **(IV)** 24; **(V)** недостаточно данных для решения задачи; **(VI)** не знаю.

б) Пусть периметр основания равен 16. Высота тетраэдра равна:

(I) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; **(II)** $\sqrt{3}$; **(III)** $1,5$; **(IV)** эта ситуация невозможна; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

в) Пусть высота тетраэдра равна 1. Его объём равен

(I) 3; **(II)** $3\sqrt{3}$; **(III)** $\sqrt{3}$; **(IV)** эта ситуация невозможна; **(V)** среди приведённых ответов нет правильного; **(VI)** не знаю.

г) У тетраэдра $ABCD$ боковые грани наклонены под углом 60° к плоскости основания ABC. Площадь основания тетраэдра равна 12. Площадь полной поверхности тетраэдра равна

(I) 24; **(II)** $6\sqrt{3}+12$; **(III)** $8\sqrt{3}+12$; **(IV)** 36; **(V)** недостаточно данных для решения задачи; **(VI)** не знаю.

1. *а) Ответ:* **(III)**.

В 8 литрах смеси окажется $3 \cdot 0,05 + 5 \cdot 0,13 = 0,8$ *л* соли. Значит, концентрация равна $0,8/8 = 0,1$.

б) Ответ: **(I)**.

Пусть мы перелили из второй банки в первую x литров раствора. В ней окажется $3 + x$ литров смеси и $3 \cdot 0,05 + x \cdot 0,13$ *л* соли, что должно совпадать с $0,07 \cdot (3 + x)$. Решая это уравнение, получаем, что $x = 1$.

в) Ответ: **(III)**.

После первого переливания имеем 4 *л* с концентрацией 7% и (во второй банке) 4 *л* с концентрацией 13%. После обратного переливания во второй банке будет 5 *л* раствора и $1 \cdot 0,07 + 4 \cdot 0,13 = 0,59$ *л* соли. Значит, его концентрация равна $0,59/5 = 0,118$.

г) Ответ: **(IV)**.

При любых переливаниях «туда-обратно» в первой банке концентрация соли будет не больше, чем во второй. Значит, во второй банке не может получиться концентрация меньше, чем средняя, то есть меньше 10%.

2. *а) Ответ:* **(I)**.

Например, можно оградить прямоугольник со сторонами 16 и 20, его площадь $16 \cdot 20 = 320$ *м*^{2}.

б) Ответ: **(III)**.

Площадь прямоугольного участка со сторонами a и b равна ab. В силу неравенства о среднем арифметическом и геометрическом $\sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{2}(a + b)$, и значит, $S \leqslant \frac{1}{4}(a + b)^2$, причём знак равенства только при $a = b$. В этом случае участок имеет форму квадрата со стороной $a = 18$ и площадью $18^2 = 324$.

в) Ответ: **(III)**.

В силу неравенства о среднем арифметическом и геометрическом $\sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{2}(a + b)$, и значит, при $S = ab = 900$ отсюда получаем $30 \leqslant \frac{1}{2}(a + b)$, причём знак равенства возможен только при $a = b = 30$. Квадратный участок со стороной 30 имеет наименьший среди всех прямоугольников периметр 120.

г) Ответ: **(I)**.

Попробуем взять участок в форме круга радиуса r. Для того чтобы оградить такой участок, нужен забор длиной $2\pi r = 72$, при этом радиус r круга равен $\frac{36}{\pi} \approx 11,46$, а его площадь — $\pi r^2 > 400$ *м*^{2}.

3. *а) Ответ:* **(II)**.

Цвет каждого из двух кубиков — красный, синий или зелёный, то есть возможны три варианта. Значит, общее число всех комбинаций $3^2 = 9$.

б) Ответ: **(II)**.

Первое решение. Если бы кубиков каждого цвета было не менее 3, из них можно было бы построить $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ башен. Поскольку красных кубиков всего два, башня, составленная целиком из красных кубиков, невозможна. Поэтому общее количество башен из трёх кубиков всего 26.

Второе решение. Если самый нижний кубик башни синий или зелёный, то для цвета каждого из двух остальных кубиков есть три варианта (красный, синий или зелёный). Значит, таких башен будет $9 + 9 = 18$. Пусть цвет нижнего кубика — красный. Расположенный над ним кубик может быть любого цвета. Но если этот кубик красного цвета, то для цвета третьего кубика есть только две возможности — синий или зелёный. Если же стоящий над ним кубик — синий или зелёный, то цвет третьего кубика — красный, синий или зелёный. Таким образом, всего $2 + 3 + 3 = 8$ вариантов.

Общее количество башен из 3 кубиков — $18 + 8 = 26$.

в) *Ответ:* **(I)**.

Если бы все кубики были разного цвета, то получилось бы $(2 + 4 + 6)! = 12!$ башен. В нашем случае от перестановки любых двух красных, либо четырёх синих, либо шести зелёных, башня не меняется. Поэтому различных башен из 12 кубиков будет $\frac{12!}{2!\cdot 4!\cdot 6!} = 13860$.

г) *Ответ:* **(I)**.

Первое решение. Башню из 11 кубиков можно получить из башни в 12 кубиков, убрав верхний кубик (единственным способом). Значит, башен высотой 11 кубиков столько же, сколько башен высотой 12 кубиков.

Второе решение. Подсчитаем количество различных башен из 11 кубиков, в которых не использовался

а) красный кубик, их число $\frac{11!}{1!\cdot 4!\cdot 6!} = 2310$;

б) синий кубик, их число $\frac{11!}{2!\cdot 3!\cdot 6!} = 4620$;

в) зелёный кубик, их число $\frac{11!}{2!\cdot 4!\cdot 5!} = 6930$.

Таким образом, всего можно построить $2310 + 4620 + 6930 = 13860$ различных башен.

4. *а*) *Ответ:* **(III)**.

Пусть m — наименьшее число набора. Если оно положительно или равно 0, то остальные числа в наборе положительны, и сумма любых двух из них больше m, противоречие. Значит, наименьшее число m набора отрицательно. Очевидно, числа x и y, которые в сумме дают m, тоже отрицательны, так что в наборе *не менее трёх* отрицательных чисел.

Набор $-3, -2, -1, 1, 2, 3$ удовлетворяет условию и содержит ровно три отрицательных числа.

б) *Ответ:* **(III)**.

Рассматривая наибольшее число M набора, как и в пункте *а*) доказывается, что в наборе не менее трёх положительных чисел. Поэтому в в наборе не может быть более семи отрицательных чисел. Пример набора из 7 отрицательных чисел: $-7, -6, \ldots, -1, 1, 2, 3$.

в) *Ответ:* **(II)**.

В пунктах *а*) и *б*) установлено, что в наборе не менее трёх отрицательных и не менее трёх положительных чисел. Значит, в наборе *не меньше шести* чисел. Приведённый в пункте *а*) набор содержит ровно шесть чисел.

г) *Ответ:* **(I)**.

В наборе не менее трёх отрицательных и не менее трёх положительных чисел. Поскольку 0 не относится ни к тем, ни к другим, должно быть не менее семи чисел. Пример: $-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6$.

5. *а*) *Ответ:* **(II)**.

(Рис. 1.) Пусть N_1 и N_3 — середины сторон AB и DE соответственно. Так как CN_1 и CN_3 — медианы треугольников ABC и CDE, то $CM_1 : CN_1 = 2 : 3$ и $CM_3 : CN_3 = 2 : 3$. Треугольники CM_1M_3 и CN_1N_3 подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними, поэтому $M_1M_3 : N_1N_3 = 2 : 3$.

б) *Ответ:* **(III)**.

(Рис. 1.) Как доказано в пункте *а*), треугольники CM_1M_3 и CN_1N_3 подобны, поэтому

$M_1M_3 \parallel N_1N_3$, то есть $N_1M_1M_3N_3$ — трапеция. Значит, высоты треугольников $M_1N_1N_3$ и $M_3N_1N_3$, опущенные на общее основание N_1N_3, равны, поэтому равны и площади этих треугольников. Удалив из них общую часть — треугольник N_1KN_3, приходим к равенству площадей треугольников M_1KN_1 и M_3KN_3.

в) *Ответ:* **(II)**.

(Рис. 2.) Пусть T — середина BC. Так как AT и DT — медианы треугольников ABC и BCD, то $TM_1 : TA = 1 : 3$ и $TM_2 : TD = 1 : 3$. Треугольники TM_1M_2 и TAD подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними, поэтому $M_1M_2 : AD = 1 : 3$.

Отрезок N_2N_3 — средняя линия треугольника AED, поэтому $N_2N_3 : AD = 1 : 2$. Отсюда $M_1M_2 : N_2N_3 = (M_1M_2 : AD) : (N_2N_3 : AD) = \frac{1}{3} : \frac{1}{2} = 2 : 3$.

г) *Ответ:* **(III)**.

(Рис. 2.) Как доказано в пункте *в*), треугольники TM_1M_2 и TAD подобны, поэтому $M_1M_2 \parallel AD$. Так как N_2N_3 — средняя линия треугольника AED, то $N_2N_3 \parallel AD$. Отсюда $M_1M_2 \parallel N_2N_3$, и значит, $M_1M_2N_3N_2$ — трапеция. Диагонали трапеции M_1N_3 и M_2N_2 делят её на четыре треугольника, причем треугольники M_1OM_2 и N_3ON_2, прилежащие к основаниям, подобны. Отношение их площадей равно $(M_1M_2 : N_2N_3)^2 = 4 : 9$.

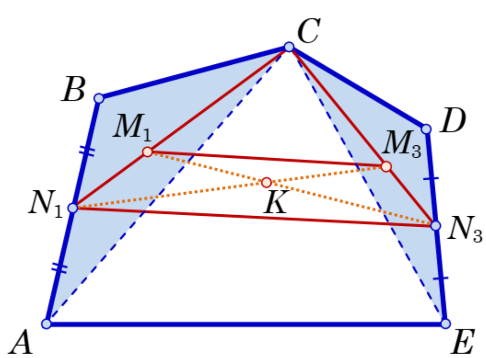

Рис. 1

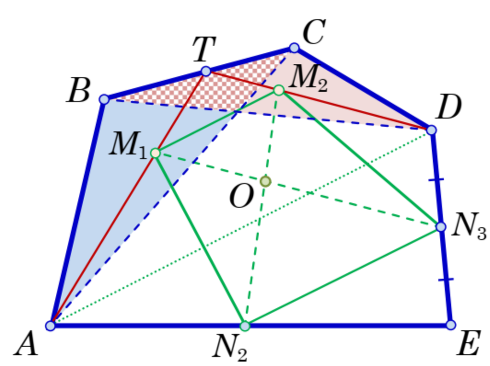

Рис. 2

6. *а*) *Ответ:* **(I)**.

При $y = 1$ исходное равенство примет вид: $f(x) = f(x) - f(1)$, и значит, $f(1) = 0$.

б) *Ответ:* **(III)**.

Условию задачи удовлетворяют, например, функции вида $f(x) = \log_a x$, где a — произвольное положительное число, $a \neq 1$.

в) *Ответ:* **(II)**.

Пусть $x = 1$, $y = 2021$, тогда $f\left(\frac{1}{2021}\right) = f(1) - f(2021)$. В пункте *а*) доказано, что $f(1) = 0$, поэтому $f\left(\frac{1}{2021}\right) = -f(2021) = 1$.

г) *Ответ:* **(II)**.

Для функции f выполняется свойство $f(x^{-1}) = -f(x)$. Это доказывается так же, как в пункте *в*). Если равенство $f(x) \cdot f(x^{-1}) = 1$ возможно, то $1 = f(x) \cdot f(x^{-1}) = f(x) \cdot (-f(x))$, то есть $f(x)^2 = -1$, противоречие.

7. *а*) *Ответ:* **(III)**.

б) *Ответ:* **(IV)**.

Оба слагаемых существуют, если $\sin x > 0$ и $\cos x > 0$. При этом условии функцию можно переписать в виде $\ln(\cos x \sin x) = \ln(\frac{1}{2} \sin 2x)$. Ясно, что при указанных условиях $0 < \sin 2x \leqslant 1$, так что функция принимает значения от $-\infty$ до $-\ln 2$.

в) *Ответ:* **(II)**.

Областью определения функции f является вся числовая прямая. Имеем $f(x)+f(-x) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x)+\ln(\sqrt{x^2+1}+x) = \ln(x^2+1-x^2) = 0$, и значит, f — нечётная функция.

г) *Ответ:* **(I)**.

Запишем функцию g в виде

$$(2\sin x\cos x + 2\cos^2 x)(\sin x - \cos x) = 2\cos x(\sin^2 x - \cos^2 x) = -2\cos x\cos 2x,$$

и значит, g — чётная функция.

8. *а*) *Ответ:* **(IV)**.

Вероятность не попасть ни разу равна $(1-0,8)(1-0,8) = 0,04$. Значит, вероятность попасть хотя бы один раз равна $1-0,04 = 0,96$.

б) *Ответ:* **(II)**.

Вероятность попадания в мишень первым выстрелом равна $0,8\cdot 0,2 = 0,16$. Такая же вероятность попасть вторым выстрелом. Значит, вероятность ровно одного попадания составляет $0,16+0,16 = 0,32$.

в) *Ответ:* **(III)**.

Вероятность промахнуться хотя бы один раз равна $1-0,8\cdot 0,8 = 0,36$. При этом в $0,04$ случаев было два промаха. Число $0,04$ составляет от $0,36$ долю $0,04/0,36 = 1/9$.

г) *Ответ:* **(III)**.

Вероятность попасть два раза равна p^2, вероятность попасть ровно один раз равна $2p(1-p)$. Приравнивая два выражения, находим, что $p = 2/3$.

9. Если отрезок BK перпендикулярен стороне AC, то треугольники ABK и BKC равны, условие задачи не выполняется. Если отрезок BK не перпендикулярен AC, то один из углов при точке K — тупой. Пусть, например, это угол AKB. Тогда в равнобедренном треугольнике ABK точка K — вершина, то есть $AK = KB$, кроме того, $AB > BC$. Обозначим угол BAK через α, тогда $\angle BKC = \angle BAK + \angle ABK = 2\alpha$.

а) *Ответ:* **(III)**.

(Рис. 3.) Точка K — середина стороны AC, так что $AK = KB = KC$, и значит, треугольник ABC — прямоугольный (но не равнобедренный).

б) *Ответ:* **(II)**.

(Рис. 4.) Пусть BK — биссектриса, $\angle ABK = \angle KBC = \alpha$. По свойству биссектрисы $AB : BC = AK : KC$, и так как $AB > BC$, то $AK > KC$. Но $AK = KB$, поэтому $KB > KC$. В треугольнике KBC угол BKC больше угла KBC, поэтому $BC > KC$. Значит, KC — основание равнобедренного треугольника KBC, и $\angle BCK = \angle BKC = 2\alpha = \angle ABC$, то есть треугольник ABC — равнобедренный ($AB = AC$).

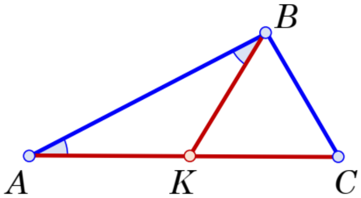

Рис. 3

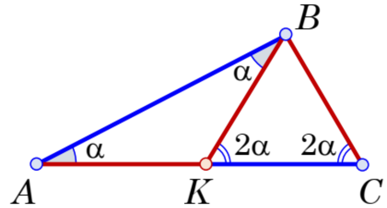

Рис. 4

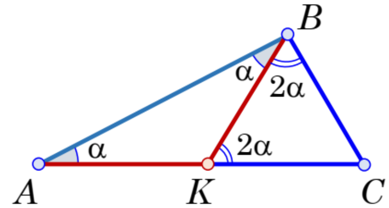

Рис. 5

в) *Ответ:* **(IV)**.

В равнобедренном треугольнике AKB вершиной является K. Какой из углов подобного ему треугольника BKC может быть равен углу AKB? Имеем $\angle AKB = \angle BCK + \angle KBC$, поэтому угол AKB больше любого из трёх углов треугольника BKC.

г) *Ответ:* **(III)**.

Заметим, что $\angle B > \angle A$, поэтому точка C не может быть вершиной равнобедренного треугольника ABC. Рассмотрим равнобедренный треугольник KBC. Если его вершиной является точка K, то $AK = KB = KC$, BK — медиана. Как показано в пункте *а*), в этом случае треугольник ABC не является равнобедренным.

Если вершиной является точка B, то $\angle C = 2\angle A$, и значит, $\angle C \neq \angle A$. Следовательно, в равнобедренном треугольнике ABC равными являются углы B и C, $\angle ABC = 2\alpha = \pi - 3\alpha$, $\alpha = \pi/5$.

(Рис. 5.) Пусть вершиной является C, рассмотрим два случая. Если в равнобедренном треугольнике ABC равны углы C и A, то $\pi - 4\alpha = \alpha$, $\alpha = \pi/5$. Если $\angle C = \angle ABC = 3\alpha$, то $\pi - 4\alpha = 3\alpha$, $\alpha = \pi/7$.

Итак, есть три варианта треугольников ABC с углами $(\pi/5, 2\pi/5, 2\pi/5)$; $(\pi/5, 3\pi/5, \pi/5)$; $(\pi/7, 3\pi/7, 3\pi/7)$.

10. *а*) *Ответ:* **(III)**.

Если фигуру площадью S спроецировать на плоскость α, площадь проекции будет равна $S\cos\varphi$, где φ — угол между плоскостью фигуры и α. В данном случае проекции боковых граней на основание заполняют это основание, то есть $12 = S\cos 30^\circ = S\sqrt{3}/2$, где S — суммарная площадь боковых граней. Отсюда $S = 8\sqrt{3}$.

б) *Ответ:* **(I)**.

Известно, что при фиксированном периметре максимальной площадью обладает равносторонний треугольник со стороной $a = \frac{P}{3}$, то есть $S \leqslant \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{P^2\sqrt{3}}{36}$, и значит, $P^2 \geqslant 12S\sqrt{3}$. В данном случае это соотношение выполняется: $256 > 144\sqrt{3}$. Треугольник такой площади и периметра всегда можно подобрать (например, среди равнобедренных).

Зная периметр и площадь основания треугольника, можно вычислить радиус вписанной в него окружности, исходя из формулы $S = \frac{1}{2}rP$. Имеем $r = \frac{2S}{P} = \frac{2\cdot 12}{16} = 1,5$. С другой стороны, вершина D проецируется в центр вписанной окружности основания (легко доказываемый факт), так что высота тетраэдра равна $H = r\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{r}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

в) *Ответ:* **(IV)**.

По доказанному в пункте *б*) $r = H\sqrt{3}$, откуда $S = \frac{H\sqrt{3}}{2}P$, что должно удовлетворять выведенному выше неравенству. Оно принимает вид $P^2 \geqslant 18HP$, откуда $P \geqslant 18H$ и $S = \frac{H\sqrt{3}}{2}P \geqslant 9H^2\sqrt{3}$, что противоречит условию задачи.

г) *Ответ:* **(V)**.

В отличие от задания *а*) плоскость боковой грани может быть наклонена «вовне» тетраэдра, то есть внутренний угол между гранью и основанием составит 120°. При этом проекции боковых граней могут выходить за пределы основания, так что нельзя утверждать, что сумма их площадей равна 12. В этом случае 12 является «алгебраической суммой» площадей проекций, то есть некоторые из них могут входить в сумму со знаком «минус». Например, если $12 = S_1 + S_2 - S_3$, то сумму $S_1 + S_2 + S_3$ по этим данным определить невозможно. Кроме того, мы не знаем, какой именно из вариантов расстановки знаков реализовался.