Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан
6 класс, финальный тур. 12 февраля 2022 года. Решения задач.

1. Расставьте в клетках таблицы 2×5 цифры от 0 до 9 так, чтобы все числа, которые можно прочитать по строкам слева направо и по столбцам сверху вниз, делились на 9. Числа не должны начинаться с нуля. *Достаточно привести один пример.*

Решение. Можно, например, так.

1	7	4	6	9
8	2	5	3	0

2. На острове живут рыцари (всегда говорят правду), лжецы (всегда лгут) и хитрецы (говорят, что им вздумается). Трое островитян — Петя, Вася и Толя, один из которых является рыцарем, один — лжецом и один — хитрецом, — высказали следующие утверждения. Петя: «Вася — лжец». Вася: «Толя — хитрец». Толя: «Петя — рыцарь». Кто из них кем является? *Обоснуйте свой ответ.*

Ответ. Петя — лжец, Вася — рыцарь, Толя — хитрец.

Решение. Заметим, что Толя не может быть рыцарем, так как тогда Петя — тоже рыцарь, а двух рыцарей нет.

Предположим, что рыцарь — это Петя. Тогда из его слов следует, что Вася — лжец. Последний оставшийся (Толя) тогда обязан быть хитрецом, но в таком случае получается, что Вася сказал правду. Противоречие.

Следовательно, рыцарем может быть только Вася. Из его слов следует, что Толя — хитрец. Тогда Петя может быть только лжецом. При этом Петя действительно лжет про Васю, а Толя лжет про Петю. Противоречия не возникает.

3. Два трактора должны почистить дорогу от снега. Один из них начинает с одного конца дороги, второй — с другого. Если первый трактор поработает один час, а потом уедет, то второму останется почистить на 50 метров больше, чем сделал первый. Если же, наоборот, второй трактор поработает один час, а потом уедет, то первому останется почистить на 80 метров больше, чем сделал второй. Участок какой длины останется нечищеным, если один час проработают оба трактора? *Обоснуйте свой ответ.*

Ответ. 65 метров.

Первое решение. (Немного подумаем). Первый трактор собирается почистить на 50 метров меньше, чем оставить. Если бы он почистил на 25 метров больше, оставив на 25 метров меньше, то он вычистил бы ровно половину всей дороги. Аналогично, если бы второй трактор почистил на 40 метров больше, чем собирался, то он бы почистил ровно половину. При этом вся дорога была бы почищена, поэтому остаток составляет $25 + 40 = 65$ метров.

Второе решение. (Напишем уравнения). Пусть первый трактор может почистить x метров дороги за час, а второй — y метров. Пусть z метров — длина оставшегося куска дороги. Из условия задачи следуют равенства:

$$x + 50 = y + z, \qquad y + 80 = x + z.$$

Сложим эти два уравнения и получим

$$x + 50 + y + 80 = x + y + 2z.$$

Следовательно, $2z = 130$, откуда $z = 65$.

4. У короля есть шесть гирь весом 1, 2, 3, 4, 5 и 6 граммов соответственно. Все гири внешне выглядят одинаково. К сожалению, наклейки, обозначающие веса гирь, потерялись. Придворный эксперт провел исследование и утверждает, что знает, какая гиря сколько весит. Как ему при помощи двухчашечных весов не более, чем за три взвешивания доказать королю свою правоту? *Обоснуйте свой ответ.*

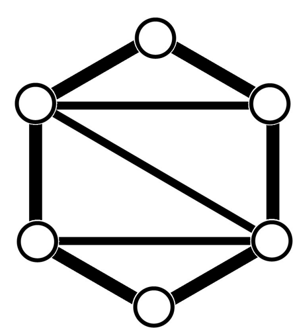
Решение. Покажем, как эксперту справиться за три взвешивания.

Первым взвешиванием эксперт кладет на одну чашу гири 1, 2, 3 грамма, а на другую — 6 граммов. Весы приходят в равновесие. Поскольку это единственная возможность уравновесить одну гирю тремя, король понимает, что гиря в 6 граммов установлена. Кроме того, известен набор из гирь в 1, 2 и 3 грамма (в неизвестном порядке).

Вторым взвешиванием эксперт берет эти три гири и кладет на одну чашу 1 и 2, а на другую — 3 грамма. Весы снова в равновесии и теперь король понимает, что гиря в 3 грамма тоже найдена. Кроме того, известен набор из гирь в 1 и 2 грамма. Две гири, которые до сих пор не участвовали во взвешиваниях — это гири в 4 и 5 граммов.

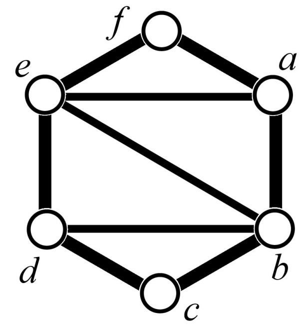
Третьим взвешиванием эксперт берет гирю в 1 грамм, кладет на первую чашу с гирей в 4 грамма, а на вторую чашу — гирю весом 5 грамм. Весы приходят в равновесие. Король понимает, что во-первых, та гиря, что была на второй чаше — это гиря в 5 граммов (потому что она тяжелее), а та, которая была на первой чаше — в 4 грамма (она, соответственно, легче), а во-вторых, что вместе с ней лежала именно гиря в 1 грамм (а не в 2 грамма). Теперь король знает гири 1, 4, 5 граммов, а значит, и гирю в 2 грамма.

5. Можно ли расставить в кружочки на рисунке шесть последовательных натуральных чисел так, чтобы сумма чисел в вершинах любого треугольника, составленного из отрезков на рисунке, была простым числом? Натуральное число называется простым, если оно делится только на само себя и на единицу. *Обоснуйте свой ответ.*



Ответ. Нельзя.

Первое решение. (Если в условии дана диагональ, значит она для чего-то нужна). Обозначим числа в кружочках буквами a, b, c, d, e и f, как показано на рисунке. Заметим, что три из этих чисел — четные, а другие три — нечетные.



Кроме того, сумма любых трех натуральных чисел больше 2, поэтому, если она равна простому числу, то это число — нечетное. Рассмотрим числа b и e.

1) Пусть оба этих числа нечетны. Тогда из треугольника bea следует, что a — нечетно. Тогда из треугольника aef следует, что f — нечетно. Аналогично, d и затем c также нечетны. Следовательно, всего у нас 6 нечетных чисел. Противоречие.

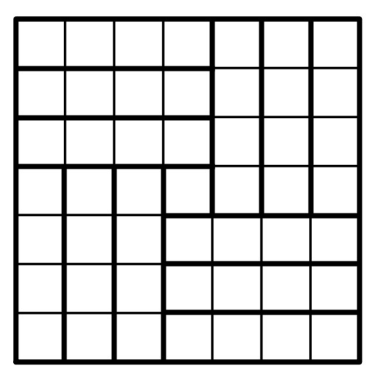
2) Пусть оба этих числа четны. Аналогично, тогда из треугольника bea следует, что a — нечетно. Тогда из треугольника aef следует, что f — нечетно. Аналогично, d и затем c также нечетны. Следовательно, всего у нас 4 нечетных числа и 2 четных. Противоречие.

3) Пусть, наконец, эти числа разной четности. В силу симметрии картинки достаточно разобрать случай, когда b нечетно, а e — четно. Тогда из треугольника bea следует, что a — четно. Тогда из треугольника aef следует, что f — нечетно. Аналогично, из треугольника bed следует, что d — четно. Тогда из треугольника bcd следует, что c — четно. Следовательно, всего у нас 4 нечетных числа и 2 четных. Противоречие.

Второе решение. (Совершенно не обязательно). Сумма всех шести чисел нечетна, так как среди три нечетных. Эта сумма складывается из двух сумм троек чисел в вершинах треугольников aef и bcd. Отсюда следует, что обе суммы $a + e + f$ и $b + c + d$ не могут быть нечетными (иначе их сумма была бы четна). Значит, одна из них равна четному числу, большему 2, следовательно, является составным числом.

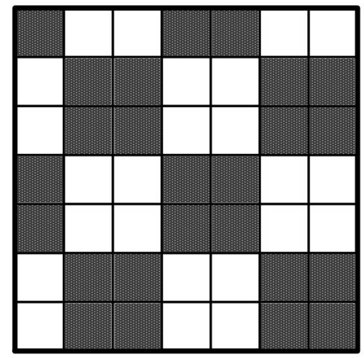
6. Какое наибольшее количество клеток можно отметить в квадрате 7×7 так, чтобы не нашлось прямоугольника 1×3, у которого отмечены обе крайние клетки? Прямоугольник может располагаться и вертикально, и горизонтально. *Обоснуйте свой ответ.*

Ответ. 25.



Решение. *Оценка.* Назовем прямоугольник 1×3, у которого обе отмечены обе крайние клетки, *красивым.* Покажем, что если отмечено хотя бы 26 клеток, то красивый прямоугольник 1×3 найдется. Сначала заметим, что прямоугольник 1×4 можно разбить на две пары клеток, являющихся крайними в прямоугольнике 1×3: $\boxed{1\,|\,2\,|\,1\,|\,2}$. Отсюда следует, что если в каком-то прямоугольнике 1×4 будет отмечено хотя бы три клетки, то будет отмечена целиком какая-то пара — либо клеток с номером 1, либо клеток с номером 2. Квадрат 7×7 можно разбить на 12 прямоугольников 1×4 и еще одну отдельную клетку (см. рисунок).

Следовательно, для того, чтобы красивого прямоугольника 1×3 не нашлось, в каждом из этих 12 прямоугольников 1×4 может быть отмечено максимум по две клетки, и еще может быть отмечена отдельная центральная клетка. Всего это максимум $12 \cdot 2 + 1 = 25$ клеток.



Пример. Чтобы построить пример, нужно в каждом из 12 прямоугольников 1×4 отметить ровно две клетки, и еще центральную. Сделать это можно, например, таким образом (см. рисунок).

Замечание. На самом деле это шахматная раскраска квадрата 8×8 в квадратики 2×2, из которого затем удалены крайняя строка и крайний стоблец.