Олимпиада по математике г. Казани (14.05.2022)
2 класс

Решения и критерии оценивания

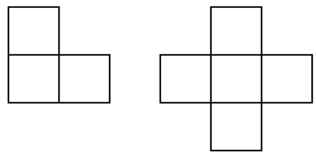
1. Вдоль беговой дорожки стоят красные и синие флажки. Флажков каждого цвета поровну. Леня и Петя встретились у некоторого красного флажка, пошли в противоположные стороны и дошли до концов дорожки. Они считали количество флажков каждого цвета, начиная с красного, у которого встретились. Петя насчитал 10 красных и 5 синих. Леня насчитал 7 красных и несколько синих. Сколько синих флажков насчитал Леня?

Решение: Всего мальчики посчитали 7+10=17 красных флажков. Но один флажок посчитан ими обоими: тот, около которого они встретились. Значит всего красных флажков вдоль беговой дорожки 16. Значит и синих 16. Раз Петя насчитал 5, то все остальные посчитал Леня. Поэтому он насчитал 16-5=11 флажков.

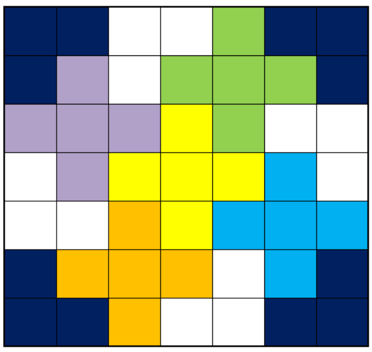
Критерии:

1. Забыли вычесть два раза посчитанный красный флажок, остальное все верно - 2 балла.
2. Вместо вычитания прибавили к красным флажкам один, остальное все верно - 1 балл

2. Разрежьте квадрат 7×7 клеток на трёхклеточные уголки и пятиклеточные кресты так, чтобы обе фигуры присутствовали и не осталось других частей (фигуры можно поворачивать и переворачивать, разрезать можно только по сторонам клеток).



Решение:



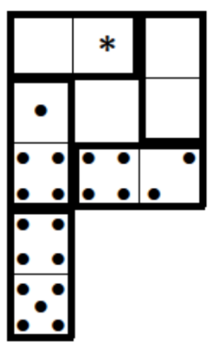
Критерии: Если разрезали квадрат 7×7 см, то 0 баллов.

3. Рома посчитал количество игрушек у своих подружек: у Ярославы – 5 игрушек, у Лизы – 7, у Насти – 9. Известно, что при подсчете количества игрушек у каждой девочки Рома ошибся на одну игрушку в большую или меньшую сторону. Сколько игрушек у каждой из девочек, если известно, что суммарно у трех девочек 24 игрушки?

Решение: Всего Рома насчитал 21 игрушку. Но у девочек 24 игрушки. Значит Рома недосчитал 3 игрушки. Но это максимум, который он мог недосчитать, ведь у каждой девочки он недосчитал максимум 1 игрушку. И это единственная возможность, чтобы в сумме у девочек было 24 игрушки. Значит Рома каждый раз ошибся на 1. Поэтому игрушек было 6,8,10.

Критерии:

1. Только верный ответ - 3 балла.



2. Замечено, что разность между реальным количеством игрушек и посчитанными Ромой равна 3 - 1 балл (суммируется с предыдущим).

4. Маша расположила 5 костяшек домино в форме буквы Р, соблюдая правило: на соприкасающихся половинках костяшек должно быть одинаковое количество точек. Количество точек на всех доминошках в сумме равно 29. Маша нарисовала букву, но забыла отметить точки на двух доминошках. Сколько точек было на месте звездочки?

Решение: Рядом с одной точкой должна быть клеточка с одной точкой, рядом с двумя точками – с двумя. На оставшиеся две клеточки приходится 29-5-4-4-4-1-1-2-2=6 точек. Они соседние, поэтому в них одно и тоже количество точек. Значит там по 3 точки.

Критерии:

1. Верная картинка без пояснений - 5 баллов.
2. Верно поставлены точки на границы с имеющимися точками (1 и 2 точки) - 1 балл. (Не суммируется с первым критерием.)
3. Подсчитано, что надо поставить еще 9 точек - 1 балл. (Не суммируется с первым критерием.)

5. В девяти коробках лежат соответственно 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 конфет. Вася за одно действие может взять равное количество конфет из двух разных коробок и переложить их в другую коробку. Вася хочет собрать все конфеты в одну коробку. Сможет ли Вася собрать все конфеты в одной коробке менее, чем за 7 действий?

Решение: Да, можно. Например, вот так:

(1,2,3,4,5,6,7,8,9)
(0,2,3,4,5,6,6,8,11)
(0,2,0,4,2,6,6,8,17)
(0,0,4,4,0,6,6,8,17)
(0,8,0,0,0,6,6,8,17)
(0,8,0,0,0,0,0,8,29)
(0,0,0,0,0,0,0,0,45)

Критерии: Верный ответ - 0 баллов.

6. У крестьянина есть электронные весы, которые правильно измеряют вес в килограммах, но последняя цифра на табло перегорела. Например, если поставить на них гирю весом 32 кг, то весы покажут "3_". Крестьянин провел следующие измерения: Волк, коза и две капусты - "4_"; коза, капуста и два волка - "6_"; три капусты и коза - "2_"; три волка и капуста - "6_". Кроме крестьянина лодка вмещает еще максимум 39 кг (при большем весе утонет). Крестьянин погрузил в лодку волка, козу и капусту и отчалил. Может ли лодка утонуть?

Решение: Может. Если волк и коза весят по 20 кг, а капуста 1 кг, то лодка утонет.

Критерии:

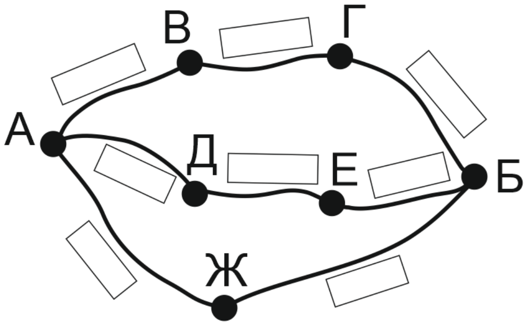
1. Верный ответ - 0 баллов.

Олимпиада по математике г. Казани (14.05.2022)
3 класс

Решения и критерии оценивания

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Минимальный балл за задачу — 0 баллов.

1. Ниф-Ниф, Наф-Наф и Нуф-Нуф поспорили, кто из них быстрее доберется из города А в город Б. Они поехали тремя разными маршрутами. Ниф-Ниф поехал по маршруту А-В-Г-Б, Наф-Наф по маршруту А-Д-Е-Б, а Нуф-Нуф по маршруту А-Ж-Б. Каждый маршрут состоит из двух или трех дорог между соседними городами (например, маршрут А-Ж-Б состоит из дорог А-Ж и Ж-Б). В пути каждый поросенок записывал, сколько времени у него заняла каждая дорога. Получились такие записи: 7 ч 45мин, 7 ч 35 мин, 4 ч 50 мин, 4 ч 45 мин, 4 ч 40 мин, 2 ч 50 мин, 2 ч 20 мин, 2 ч 15 мин.



Удивительно, но поросята потратили на дорогу от А до Б одинаковое время! Расставьте записи на карте так, чтобы условие задачи выполнялось.

Комментарий: *Достаточно привести один пример.*

Решение: Общее время, затраченное на путь каждым поросенком, – 12 ч 20 мин.

Ниф-Ниф: 2 ч 50 мин, 4 ч 40 мин, 4 ч 50 мин.

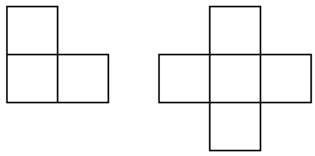
Наф-Наф: 2 ч 20 мин, 7 ч 45 мин, 2 ч 15 мин.

Нуф-Нуф: 4 ч 45 мин, 7 ч 35 мин.

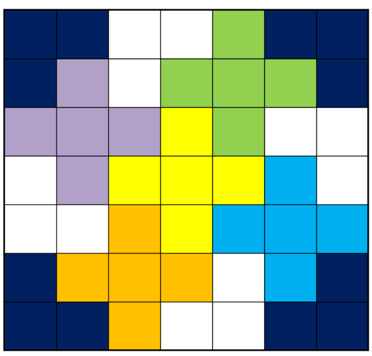
Есть и другие верные примеры.

Критерии: Две таблички перепутаны местами – 2 балла.

2. Разрежьте квадрат 7×7 клеток на трёхклеточные уголки и пятиклеточные кресты (см.рис.). Фигуры можно поворачивать и переворачивать, разрезать можно только по сторонам клеток.



Комментарий: *Достаточно привести один пример. При разрезании не может оставаться лишних обрезков.*

Решение:  , есть и другие варианты разрезания.

Критерии:

1. Если разрезали квадрат 7×7 сантиметров – 0 баллов.
2. Если остались лишние клетки – 0 баллов.

3. Расставьте числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, каждое по одному разу, в клетки квадрата 3×3 так, чтобы сумма чисел в любом квадрате 2×2 была одним и тем же числом.

Комментарий: *Достаточно привести один пример. Покажите, что этот пример подходит.*

5	3	4
8	7	9
2	6	1

Решение: Например, можно было расставить так, как на картинке. 3+5+8+7 = 23, 3+7+4+9=23, 8+2+7+6=23, 9+1+7+6=23. Пример подходит. Есть и другие верные расстановки.

Критерии: Приведен верный пример, но не доказано, что он подходит – 5 баллов.

4. Четыре девочки, каждая вместе со своим братом, гуляли в парке и ели мороженое, все вместе они съели 30 мороженых. Аня съела 1 мороженое, Маша – 2, Света – 3, Катя – 4. Гриша съел столько же, сколько и его сестра, Дима – в два раза больше своей сестры, Паша – в три раза больше своей сестры, а Леша – в четыре раза больше сестры. Как такое могло быть?

Комментарий: *Приведите пример для каждого мальчика чьим братом он может быть и сколько мороженых он съел. Покажите, что этот пример подходит.*

Решение: Гриша брат Кати съел 4 порции мороженого, столько же сколько и его сестра: 4×1=4, Дима брат Светы съел 6 порций мороженого, в два раза больше сестры: 3×2=6, Паша брат Маши съел 6 порций мороженого, в три раза больше сестры: 2×3=6, Леша брат Ани съел 4 порции мороженого, в четыре раза больше сестры: 1×4=4. Всего дети съели 1+2+3+4+4+6+6+4=30 порций мороженого.

Критерии:

1. Указано, кто чей брат и сколько он съел, но нет проверки, что этот случай подходит – 5 баллов.
2. Указано только, кто чей брат – 3 балла.
3. Указано только, кто сколько съел – 3 балла.
4. Есть проверка, но не указано, кто чей брат или сколько он съел – 5 баллов.

5. В девяти коробках лежат соответственно 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 конфет. Вася за одно действие может взять равное количество конфет из двух разных коробок и переложить их в другую коробку. Вася хочет собрать все конфеты в одну коробку. Сможет ли Вася собрать все конфеты в одной коробке менее, чем за 7 действий?

Решение: Да можно. Например вот так:

1,2,3,4,5,6,7,8,9
0,1,3,4,5,6,7,8,11
0,1,0,1,5,6,7,8,17
0,1,0,1,0,1,7,8,27
0,1,0,1,0,1,0,1,41
0,0,0,0,0,1,0,1,43
0,0,0,0,0,0,0,0,45

Критерии:

1. Верный ответ – 0 баллов.
2. Какое-то действие происходит с нарушениями (например, шары берутся только из одной коробки) – 0 баллов

6. У крестьянина есть электронные весы, которые правильно измеряют вес в килограммах, но последняя цифра на табло перегорела. Например, если поставить на них гирю весом 32 кг, то весы покажут "3_". Крестьянин провел следующие измерения: Волк, коза и две капусты – "4_"; коза, капуста и два волка – "6_"; три капусты и коза – "2_"; три волка и капуста – "6_". Кроме крестьянина лодка вмещает еще максимум 39 кг (при большем весе утонет). Крестьянин погрузил в лодку волка, козу и капусту и отчалил. Может ли крестьянин быть уверен в том, что они доберутся до другого берега?

Решение: Нет. Возможно, что волк и коза весят по 20 кг, а капуста 1 кг. Проверим, что все условия задачи при этих данных выполняются. Волк, коза и две капусты – "42"; коза, капуста и два волка – "61"; три капусты и коза – "23"; три волка и капуста – "61". При этом Волк + Коза + Капуста = 41 кг > 39 кг, а значит лодка утонет.

Критерии:

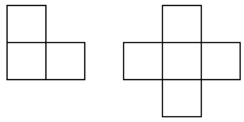
1. Верный ответ – 0 баллов.
2. Пример без объяснения – 4 балла.

Олимпиада по математике г. Казани (14.05.2022)
4 класс

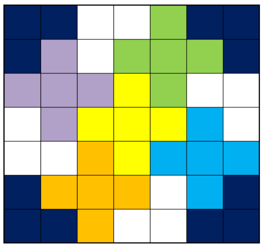
Решения и критерии оценивания

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Минимальный балл за задачу — 0 баллов.

1. Разрежьте квадрат 7×7 по линиям сетки на трёхклеточные уголки и пятиклеточные кресты так, чтобы обе фигуры присутствовали. Фигуры можно поворачивать и переворачивать.



Решение: Пример разрезания



2. Рома посчитал количество игрушек у своих подружек: у Ярославы – 5 игрушек, у Лизы – 7, у Насти – 9. Известно, что при подсчете количества игрушек у каждой девочки, он ошибся на единицу в большую или меньшую сторону. Сколько игрушек у каждой из девочек, если известно, что суммарно у трех девочек 24 игрушки?
Комментарий: *Не забудьте обосновать свой ответ.*

Решение: Всего Рома насчитал 21 игрушку. Но у девочек 24 игрушки. Значит Рома недосчитал 3 игрушки. Но это максимум, который он мог недосчитать, ведь у каждой девочки он недосчитал максимум 1 игрушку. И это единственная возможность, чтобы в сумме у девочек было 24 игрушки. Значит Рома каждый раз ошибся на 1. Поэтому игрушек было 6, 8, 10.

Критерии:
Только верный ответ – 1 балла.
Замечено, что разность между реальным количеством игрушек и посчитанными Ромой равна 3 – 2 балла.
Выполнены последние два критерия – 4 балла.

3. Среди номеров подряд идущих страниц, прочитанных Колей, цифра “3” встретилась столько же раз, сколько и цифра “5”. Могла ли цифра “4” встретиться меньшее число раз, чем цифра “3”, если известно, что Коля прочитал больше двадцати страниц? Коля мог начать читать книгу с любой страницы. **Комментарий**: *Если да, то приведите пример номеров страниц; если нет, то объясните почему.*

Решение: Такое могло быть. Пример: числа от 5 до 30. Всего 26 страниц. Цифры “3” и “5” встречаются по 3 раза в числах 13, 23, 30 и 5, 15, 25, а цифра “4” всего два раза в числах 14 и 24.

Критерии:
Верный ответ – 0 баллов.
Верный ответ с примером – 7 баллов.

4. Марат купил 8 шоколадок без обёртки: три молочных и пять горьких. Каждая шоколадка состоит из трёх долек. Дольки с виду не отличаются, но долька горького шоколада тяжелее, чем долька молочного. У продавца шоколадок есть двухчашечные весы, за использование которых продавец съедает всё содержимое чаш весов. Как Марату точно определить и съесть 5 долек молочного шоколада, не съедая горький?
Комментарий: *Для взвешивания нельзя отламывать часть шоколадки меньшую, чем одна долька. Необходимо привести схему взвешивания долек и доказать, что независимо от результатов взвешивания можно точно определить 5 долек молочного шоколада.*

Решение: Разобьём шоколадки на четыре пары. В первой паре взвесим одну дольку от первой шоколадки с одной долькой от второй шоколадки. Аналогичные взвешивания сделаем и с остальными парами. Так как молочных шоколадок три, среди проведенных четырёх взвешиваний будет либо одно неравенство, либо три неравенства.
Если получилось три неравенства, то уже определены все остатки молочных шоколадок по две дольки (всего 6). Можно съесть пять из них.
Если получилось одно неравенство, то определены две дольки молочного шоколада. В остальных равенствах: в одном осталось 4 дольки молочного шоколада и в двух остальных осталось по 4 дольки горького шоколада. Взвесим по одной из оставшихся долек из двух разных равенств. Если на последнем взвешивании получилось равенство, то это равенство горьких шоколадок, значит мы определили оставшиеся четыре дольки молочного шоколада (итого 6 долек молочного шоколада). Если на последнем взвешивании было неравенство, то определяем какие три дольки относились к молочному шоколаду (итого имеем 5 долек молочного шоколада).

Критерии:
Разобран случай, когда из четырёх взвешиваний произошло три неравенства – 2 балла.

5. В марафоне при забеге на 40 километров финишировали друг за другом пять спортсменов. На каждом спортсмене была майка с ненулевым номером. Вася запомнил следующие факты про номера спортсменов.

1) Сумма номеров первых двух спортсменов является чётным числом.
2) Номера спортсменов при финишировании шли в порядке возрастания.
3) Сумма номеров последних двух спортсменов – это нечётное число.
4) Произведение номеров второго и третьего спортсмена чётно.
5) Сумма номеров всех пяти финалистов равна 26.

Какие номера могли быть у спортсменов? **Комментарий**: *Укажите все возможные варианты и докажите, что других вариантов нет.*

Ответ: 2, 4, 5, 7, 8 и 2, 4, 5, 6, 9.

1	2
3	4

Решение: Для удобства обозначим номера спортсменов буквами *A, B, C, D* и *E* в порядке финиширования.

Из условий 1) и 3) следует, что сумма номеров четырех спортсменов $(A+B)+(D+E)$ является нечетным числом. По условию 5) при добавлении *C* должно получиться число 26, которое четно. Следовательно, номер *C* должен быть нечетным числом.

Так как С нечетно, тогда для выполнения условия 4) В обязано быть четным числом. Значит и число А должно быть четным по условию 1). Тогда сумма чисел А и В - хотя бы 2 + 4 = 6.

Если число C будет по крайней мере 7, то сумма оставшихся чисел будет не меньше, чем 8 + 9, так как номера должны идти по возрастанию, то тогда сумма всех номеров уже больше 26.

Значит C = 5, то A и B - действительно числа 2 и 4, как единственные ненулевые чётные числа, меньшие 5. Тогда C + D = 26 - 2 - 4 - 7 = 13, при этом числа 5 < C < D. Единственные варианты: C = 6, D = 9 или C = 7, D = 8.

Критерии:
Один из двух верных ответов или хотя бы один неверный ответ – 0 баллов.
Полный верный ответ – 1 балл.
Обосновано утверждается, что чётность пяти номеров либо Ч Ч Н Ч Н, либо Ч Ч Н Н Ч, без дальнейшего продвижения – 2 балла.
Последние два критерия суммируются

6. У Алины есть 24 салфетки размером 22 клетки. На каждой салфетке написаны числа от 1 до 4, как показано на рисунке справа. Алина хочет выложить все салфетки на клетчатую доску 6×6 так, чтобы границы салфеток совпадали с границами клеток доски. Она не может поворачивать или сгибать салфетки, но может накладывать салфетки друг на друга. Какая наибольшая сумма чисел на доске может получиться у Алины после выставления всех салфеток? **Комментарий**: *Необходимо привести не только ответ с примером расположения салфеток, но и объяснить, почему большей суммы быть не может.*

Ответ: 125

1	2	2	2	2	2
3	4	4	4	4	4
3	4	4	4	4	4
3	4	4	4	4	4
3	4	4	4	4	4
3	3	4	4	4	4

Решение: Заметим, что в левом верхнем углу не может стоять число, большее 1, так как и салфетки в левом верхнем углу стоит “1”.

В верхней строке, за исключением крайней левой клетки, могут стоять числа “1” или “2”, поскольку в салфетке сверху стоят только эти числа. Аналогично, в левом столбце могут стоять только числа “1” и “3”. В оставшихся клетках число “4” стоять может.

Поэтому больше чем значение суммы 1×1 + 2×5 + 3×5 + 4×25 = 126 получить нельзя.

Однако, для единственной возможной расстановки чисел для суммы 126 мы должны использовать 25 чисел “4”, но салфеток только 24.
Пример для суммы 125 приведен на рисунке.

Критерии:
Пример расстановки салфеток на сумму 126 – 1 балл.
Утверждается, что в верхней строке (и/или левом столбце) могут быть расположены только числа “1” и “2” (“1” и “3”) – 1 балл.
Пример расстановки салфеток на сумму 125 – 2 балла.
Доказано, что при неограниченном количестве салфеток сумма чисел на доске не превосходит 126 – 5 баллов.

Олимпиада по математике г. Казани (14.05.2022)
5 класс

Решения и критерии оценивания

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Минимальный балл за задачу — 0 баллов.

1. Расставьте числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, каждое по одному разу, в клетки квадрата 3×3 так, чтобы сумма чисел в любом квадрате 2×2 была одним и тем же числом.

Комментарий: *Достаточно привести один пример.*

5	3	4
8	7	9
2	6	1

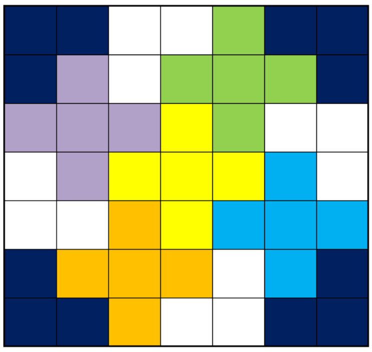
Решение: Например, можно было расставить так, как на картинке. 3+5+8+7 = 23, 3+7+4+9=23, 8+2+7+6=23, 9+1+7+6=23. Пример подходит. Есть и другие верные расстановки.

Критерии:

1. Решение неверное или отсутствует — 0 баллов.
2. Верное решение — 7 баллов.

2. Разрежьте какой-нибудь клетчатый квадрат на трёхклеточные уголки и пятиклеточные кресты так, чтобы обе фигуры присутствовали (фигуры можно поворачивать и переворачивать, разрезать можно только по линиям сетки).

Комментарий: *Размеры квадрата Вы можете выбрать сами. Достаточно привести один пример разрезания квадрата какого-нибудь размера.*

Решение:  , есть и другие варианты разрезания.

Критерии:

1. Решение неверное или отсутствует — 0 баллов.
2. Показано, как разбить на трехклеточные уголки и пятиклеточные кресты любой прямоугольник. Дальнейших продвижений по задаче нет — 3 балла.
3. Верное решение — 7 баллов.

3. Для изготовления отворотного зелья используется настой из мандрагоры и отвар бадьяна. На рынке в Косом переулке один литр настоя из мандрагоры стоит 90 галлеонов, а один литр отвара бадьяна — 15 галлеонов. Один литр готового зелья стоит 78 галлеонов. Сколько миллилитров настоя из мандрагоры содержится в одном литре отворотного зелья?

Ответ. 840. **Решение:** Пусть для зелья нужно x литров настоя и $1-x$ литров отвара. Составим уравнение $90x + 15(1-x) = 78$. Преобразуем его к виду $75x = 63$. Откуда $x = 0,84$ литра. Значит нужно 840 миллилитров настоя.

Критерии:

1. Решение неверное или отсутствует — 0 баллов.
2. Получен верный ответ 840 мл. — 1 балл.
3. Верное решение — 7 баллов.

4. Городская олимпиада проходит на базе шести школ. Ваня хочет узнать, сколько участников пишут олимпиаду в каждой школе. Он может спросить у жюри про любые 4 школы и жюри ответит, сколько детей в сумме в них пишут. Сможет ли Ваня за несколько вопросов определить количество участников в каждой школе?

Ответ. Сможет. **Решение.** Обозначим количество детей в 1-ой школе за A, во второй за B т.д. до F. Также обозначим $S=A+B+C+D+E+F$. Определим S за три вопроса: $2S=(A+B+C+D)+(E+F+A+B)+(C+D+E+F)$. Возьмём 5 сумм, в которых будет 6-ая школа, а остальные три сменяются по циклу: $(A+B+C+F)+(B+C+D+F)+...+(E+A+B+F)$. В этой сумме F присутствует 5 раз, а остальные слагаемые по 3 раза. Значит, можно узнать $3S+2F$. Поскольку мы знаем, как найти S, то и F можно определить. Аналогично определяются количества детей в других школах. (Есть множество аналогичных решений.)

Критерии:

1. Решение неверное или отсутствует — 0 баллов.
2. Доказано, что Ваня может узнать суммарное количество детей в 5 школах или в любом другом количестве школ большем 1 — 1 балл.
3. Доказано, что Ваня может узнать количество детей в одной конкретной школе, но ничего не говорится про то, как Ваня узнает количество детей в остальных школах — 6 баллов.
4. Верное решение — 7 баллов.

5. У крестьянина есть электронные весы, которые правильно измеряют вес в килограммах, но последняя цифра на табло перегорела. Например, если поставить на них гирю весом 32 кг, то весы покажут "3_". Крестьянин провел следующие измерения: Волк, коза и две капусты — "4_"; коза, капуста и два волка — "6_"; три капусты и коза — "2_"; три волка и капуста — "6_". Кроме крестьянина лодка вмещает еще максимум 39 кг (при большем весе утонет). Крестьянин погрузил в лодку волка, козу и капусту и хочет отчалить. Можно ли точно определить, доберутся они до другого берега или утонут? Ответ обоснуйте.

Решение: Точно определить, доберутся ли они до другого берега, нельзя.

Возможно, что волк и коза весят по 20 кг, а капуста 1 кг. Проверим, что все условия задачи при этих данных выполняются. Волк, коза и две капусты – "42"; коза, капуста и два волка – "61"; три капусты и коза – "23"; три волка и капуста – "61". При этом Волк + Коза + Капуста = 41 кг > 39 кг, а значит лодка утонет.

С другой стороны, если волк весит 21 кг, коза=13 кг, а капуста=5 кг, то все условия также выполняются. Волк, коза и две капусты – "44"; коза, капуста и два волка – "60"; три капусты и коза – "28"; три волка и капуста – "68". При этом Волк + Коза + Капуста = 39 кг, а значит в этом случае лодка доберется до другого берега.

Критерии:

1. Решение неверное или отсутствует — 0 баллов.
2. Показано, какой вес должен быть у волка, козы и капусты, для того, чтобы они не смогли переправиться на другой берег. Дальнейших продвижений нет — 2 балла.
3. Показано, какой вес должен быть у волка, козы и капусты, для того, чтобы они смогли переправиться на другой берег. Дальнейших продвижений нет — 2 балла.
4. Верное решение — 7 баллов.

6. Бельчонок Билл каждый день заходит в социальную сеть «ВЛесу». Когда майор Мишутка изучил статистику бельчонка, то оказалось, что каждый день Билл делал одно из следующего а) публиковал 2 поста, делал репосты 3 чужих записей и ставил "лайк" 4 записям; б) публиковал 1 пост, делал 2 репоста и ставил 6 "лайков"; в) ничего не публиковал, но делал 1 репост и ставил 8 "лайков". Могло ли получиться так, что Билл за 1000 дней сделал репостов в 5,5 раз меньше, чем поставил "лайков", и в 4 раза больше, чем опубликовал своих постов?

Ответ. Не могло. **Решение 1.** Не сложно заметить, что каждый день Билл делал 9 действий, а значит за 1000 дней он сделал 9000 действий. С другой стороны мы знаем, что за эти дни он сделал репостов в 4 раза больше, чем постов, а лайков в 22 раза больше, чем постов. А значит всего действий в 27 раз больше, чем постов. Но 9000 на 27 не делится, значит такое невозможно. **Решение 2**. Предположим такое могло быть. Заметим, что в каждом случае Билл делает в день постов на 1 меньше, чем репостов. Если Билл сделал x постов, то репостов сделал $4x$. Тогда за тысячу дней репостов на 1000 больше. То есть $4x–x=1000$. Но у уравнения $3x=1000$ нет решений в целых числах. Значит такого быть не могло.

Критерии:

1. Решение неверное или отсутствует — 0 баллов.
2. В решении написано, что варианты а), б), в) содержат одинаковое количество действий равное 9 — 1 балл.
3. Верное решение — 7 баллов.

Олимпиада по математике г. Казани (14.05.2022)
6 класс
Решения и критерии оценивания

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Минимальный балл за задачу — 0 баллов.

1. Разобьем сегодняшнюю дату 14.05.2022 на 4 блока по 2 цифры. Найдем сумму крайних блоков и сумму центральных. Получится 14+22=36 и 5+20=25 — два точных квадрата. А сколько всего таких дат в 2022 году? (Т.е. таких дат, у которых сумма крайних блоков и сумма центральных тоже являются точными квадратами.)

Ответ. 3 даты. **Решение.** Сумма даты и последних цифр года не меньше 23=22+1 и не больше 53=22+31. Значит, для суммы крайних могут получиться только квадраты чисел 5, 6 и 7. Для центральных двух значение суммы от 21 до 32 — подойдёт только 25. Значит возможный месяц только май. Получились только 3 подходящие даты: 03.05.2022, 14.05.2022, 27.05.2022.

Критерии. Правильно обоснованный разбор возможных значений для каждой из сумм стоит 2 балла. Если в работе нет объяснения, как найти нужные даты, а есть только даты, то оценивается количество правильных дат: 3 даты — 2 балла, 2 даты — 1 балл, 1 или 0 дат — 0 баллов.

2. Можно ли провести на плоскости 175 прямых так, чтобы они образовывали ровно 2022 точки пересечения?

Ответ. Можно. **Решение.** Проведём 13 прямых общего положения (то есть попарно пересекающихся). Они образуют (13×12)/2=78 точек пересечения. Выберем из этих прямых одну и проведём 162 прямые, параллельные данной (то есть не пересекающихся с ней) так, чтобы никакая из них не проходила через уже имеющиеся точки пересечения. Получим ещё 162×12=1944 точек пересечения. Всего будет 1944+78=2022.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Идея использовать параллельные прямые оценивается в 1 балл.

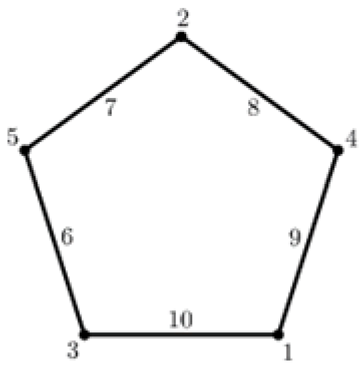
3. Городская олимпиада проходит на базе шести школ. Ваня хочет узнать, сколько участников пишут олимпиаду в каждой школе. Он может спросить у жюри про любые 4 школы и жюри ответит, сколько детей в сумме в них пишут. Сможет ли Ваня за несколько вопросов определить количество участников в каждой школе?

Ответ. Сможет. **Решение.** Обозначим количество детей в 1-ой школе за A, во второй за B т.д. до F. Также обозначим $S=A+B+C+D+E+F$. Определим S за три вопроса: $2S=(A+B+C+D)+(E+F+A+B)+(C+D+E+F)$. Возьмём 5 сумм, в которых будет 6-ая школа, а остальные три сменяются по циклу: $(A+B+C+F)+(B+C+D+F)+\ldots+(E+A+B+F)$. В этой сумме F присутствует 5 раз, а остальные слагаемые по 3 раза. Значит, можно узнать $3S+2F$. Поскольку мы знаем, как найти S, то и F можно определить. Аналогично определяются количества детей в других школах. (Есть множество аналогичных решений.)

Критерии. Если в работе присутствует только один из следующих фактов, то за работу ставятся указанные вместе с фактом баллы: 1) Ваня может найти суммарное количество учеников во всех шести школах — 1 балл; 2) Ваня может найти суммарное количество учеников в любой паре школ — 2 балла; 3) Ваня может найти разность между количествами учеников в любой паре школ — 1 балл. Если в работе присутствуют вместе 1 и 3 факты без дальнейших продвижений, то за работу ставится 3 балла. Если в работе присутствуют вместе 2 и 3 факты без дальнейших продвижений, то за работу ставится 5 баллов. Если в работе присутствуют вместе 1 и 2 факты без дальнейших продвижений, то за работу ставится 3 балла.

4. Учитель нарисовал на доске пятиугольник и написал натуральное число n. Затем Тимур вышел к доске и рядом с каждой вершиной и стороной пятиугольника написал число от 1 до 10 (каждое число было написано ровно 1 раз). Оказалось, что если взять любую сторону пятиугольника и посчитать сумму чисел в её вершинах и на самой стороне, то получится n. Для какого наименьшего n такое могло быть?

Ответ. Для n=14. **Решение.** Обозначим числа в вершинах как A, B, C, D, E, а числа на сторонах как a, b, c, d, e. Тогда $A+B+C+D+E+a+b+c+d+e=55$, так как это все числа от 1 до 10 в каком-то порядке. А сумма сумм на сторонах равна $2(A+B+C+D+E)+a+b+c+d+e=5n$, так как каждое число из вершины будет посчитано 2 раза, а число со стороны 1 раз. Тогда $5n=55+A+B+C+D+E$. Поймём, что $A+B+C+D+E\geq15$, так как это 5 разных натуральных чисел. Значит, $5n\geq70$. То есть $n\geq14$. Пример, как может быть 14, на рисунке.



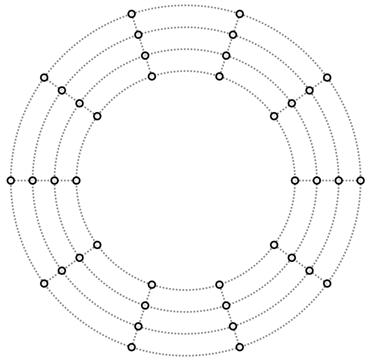
Критерии. Только правильный ответ — 0 баллов. Только правильный пример на n=14 — 2 балла. Только доказано, что $n\geq14$, но нет примера — 4 балла. В целом верное решение, но не проверен случай, когда 10 располагается в вершине — штраф в 1 балл. В целом верное решение, но без доказательства утверждается, что в вершинах должны стоять минимальные числа — штраф в 1 балл.

5. Бельчонок Билл каждый день заходит в социальную сеть “ВЛесу”. Когда майор Мишутка изучил статистику бельчонка, то оказалось, что каждый день Билл делал одно из следующего а) публиковал 2 поста, делал репосты 3 чужих записей и ставил “лайк” 4 записям; б) публиковал 1 пост, делал 2 репоста и ставил 6 “лайков”; в) ничего не публиковал, но делал 1 репост и ставил 8 “лайков”. Могло ли получиться так, что Билл за 1000 дней сделал репостов в 5,5 раз меньше, чем поставил “лайков”, и в 4 раза больше, чем опубликовал своих постов?

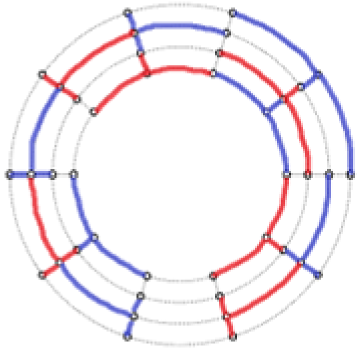
Ответ. Не могло. **Решение 1.** Предположим такое могло быть. Заметим, что каждый день Билл производил ровно 9 действий в любом случае. Тогда за 1000 дней он совершил 9000 действий. Обозначим количество опубликованных Биллом постов за x. Тогда репостов было $4x$, а лайков $22x$. Тогда всего Билл сделал за 1000 дней $27x$ действий. Однако уравнение $27x$=9000 не имеет решений в целых числах. Значит такого быть не могло. **Решение 2**. Предположим такое могло быть. Заметим, что в каждом случае Билл делает в день постов на 1 меньше, чем репостов. Если Билл сделал x постов, то репостов сделал $4x$. Тогда за тысячу дней репостов на 1000 больше. То есть $4x–x$=1000. Но у уравнения $3x$=1000 нет решений в целых числах. Значит такого быть не могло.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Найдено, что всего действий получается $27x$ — 2 балла. Замечено, что каждый день репостов было на 1 больше, чем постов — 2 балла. Замечено, что каждый день Билл совершает 9 действий — 2 балла.

6. Садовнику Сане поручили проложить систему полива для клумбы (см. рис.). Точки — места для квадратных горшков, линии — места, где можно проложить трубки для воды. Всего на схеме 4 кольца по 10 ячеек для горшков. Изначально у каждого горшка было по 1 отверстию для трубки с 4 разных сторон. (По одному отверстию с каждой стороны.) Однако техник Толя все доступные трубки припаял одним концом на часть горшков. Теперь в наличии есть отдельные горшки двух видов: 1) без трубок и 2) с 3 припаянными трубками. Свободных трубок нет. У каждой трубки 2 конца. Один из концов припаян к горшку, другой нет. Сане нужно расставить по клумбе горшки с трубками и без трубок так, чтобы горшки были только в отведённых местах, трубки проходили только по схеме и все горшки были соединены трубками в одну поливальную сеть. У горшков те дырки, в которых не будет трубок, Саня заткнёт пробками. Какое наименьшее число горшков с тремя припаянными трубками Сане придётся использовать? Обоснуйте ответ рисунком, на котором показано, как Саня может расположить горшки и трубки в таком случае.



Ответ. 13. **Решение.** Пусть у нас 40 мест для горшков. Заметим, что трубок для них нужно на меньше, то есть . Докажем это. Рассмотрим любую конструкцию из горшков и трубок, в которой нет лишних трубок. Чтобы добавить ещё один горшок, нужна хотя бы ещё одна трубка: одним концом она должна быть присоединена к имеющейся конструкции, другим — к новому горшку. Когда горшок 1, трубок не нужно. На каждый следующий горшок нужна будет ещё одна трубка. Таким образом, на 40 горшков нужно хотя бы 39 трубок. Так как трубки припаяны по 3 штуки на горшок, то минимум таких горшков нужно 13. Пример на 13 приведён на рисунке.



Критерии. Только ответ — 0 баллов. Только пример на 13 трёхтрубочных горшков — 3 балла. Только оценка, что можно обойтись 13 трёхтрубочными горшками — 3 балла.