Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан
7 класс, финальный тур. 12 февраля 2022 года. Решения задач

1. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды пять аборигенов собрались вместе и каждый сказал: «Среди присутствующих у меня ровно один друг рыцарь и ровно один друг лжец». Сколько рыцарей могло быть среди них? Если первый человек дружит со вторым, то и второй дружит с первым. *Укажите все ответы и объясните, почему других нет.*

Ответ. 0, 2 или 4 рыцаря.

Решение. Рассмотрим какого-нибудь рыцаря A (если они вообще есть). Он заявляет, что у него есть ровно один друг B, являющийся рыцарем. В свою очередь, B заявляет, что у него есть ровно один друг, являющийся рыцарем, и это может быть только A. Отсюда следует, что рыцари разбиваются на пары друзей. Следовательно, их четное количество. Поэтому может быть только 0, 2 или 4 рыцаря. Лжецов, соответственно, может быть 5, 3 или 1, то есть, хотя бы один лжец в любом случае есть.

Покажем, что все эти варианты возможны. Пусть один лжец дружит со всеми рыцарями, а остальные лжецы (если они есть) ни с кем не дружат. Все рыцари (если они есть) разбиваются на пары друзей, и все они дружат с первым лжецом.

2. По аналогии с десятичной записью числа определим *квазидесятичную* запись числа с единственным отличием: вместо степеней числа 10 будем использовать степени числа -10. Например, число 174 можно записать в квазидесятичной записи как 234, потому что

$$234_{-10} = 2 \cdot (-10)^2 + 3 \cdot (-10)^1 + 4 \cdot (-10)^0 = 200 - 30 + 4 = 174_{10}.$$

Представьте номер текущего года в квазидесятичной записи. *Достаточно привести один пример и показать, что он подходит.*

Решение. $18182_{-10} = 10000 - 8000 + 100 - 80 + 2 = 2022_{10}$. В условии задачи не сказано, что перед числом должен стоять знак «+», поэтому засчитывается так же и другое решение, в котором перед числом стоит знак «−»: $-2038_{-10} = -(2038_{-10}) = -(2 \cdot (-10)^3 + 0 \cdot (-10)^2 + 3 \cdot (-10) + 8)) = -(-2000 - 30 + 8) = -(-2022) = 2022$.

Замечание. Несложно показать, что примеры — единственные.

3. В школе ровно половина учеников учится в первую смену, остальные учатся во вторую смену. 80% всех девочек учатся в первую смену. 70% всех мальчиков учатся во вторую смену. Какой процент среди учеников первой смены составляют мальчики? *Обоснуйте свой ответ.*

Ответ. 36%.

Решение. Пусть всего d девочек и m мальчиков. Тогда в первую смену учится $0,8d + 0,3m$ детей, а во вторую — $0,2d + 0,7m$. По условию, эти числа равны, поэтому $0,8d + 0,3m = 0,2d + 0,7m$. Отсюда $d = \dfrac{2}{3}m$. Процент мальчиков от общего количества детей первой смены тогда равен

$$\frac{0,3m}{0,8d + 0,3m} = \frac{0,3}{0,8 \cdot \frac{2}{3} + 0,3} = \frac{9}{25} = 36\%.$$

4. Четыре автомобиля едут по одной и той же дороге, в одном и том же направлении, но с разными постоянными скоростями. Всего существует 24 способа расположить четыре машины друг за другом. Какое наибольшее количество из этих способов может реально случиться в течение этой поездки? *Обоснуйте свой ответ.*

Ответ. 7 способов.

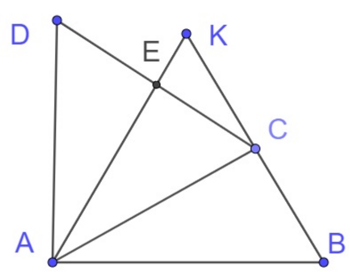
Решение.

Оценка. Смена вариантов расположения возможна только при обгоне одной машины другой. В каждой паре машин может случиться только один обгон, так как скорости постоянны. Поэтому обгонов не больше, чем количество пар машин, то есть, $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$, а различных способов расположения всех четырех машин, соответственно, не больше $6 + 1 = 7$.

Пример. Пусть машины A, B, C и D располагаются в таком порядке на расстоянии 1 км (A — последняя, D — первая). Пусть их скорости равны 1000 км/ч, 100 км/ч, 10 км/ч, 1 км/ч соответственно. Тогда варианты расположения будут следующие: $ABCD$, $BACD$, $BCAD$, $BCDA$, $CBDA$, $CDBA$, $DCBA$.

5. В четырехугольнике $ABCD$ известно, что $\angle A = 90°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 150°$ и $AB = 2BC$. Пусть K — точка пересечения прямой BC и перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую CD. Докажите, что $DK \parallel AB$.

Первое решение. Пусть E — точка пересечения AK и CD. Из суммы углов четырехугольника $ABCE$ следует, что $\angle EAB = 360° - 60° - 150° - 90° = 60°$. Следовательно, треугольник ABK — равносторонний. Из условия $AB = 2BC$ получаем что AC — высота и медиана к стороне BK. Из этого факта с одной стороны получаем счетом углов, что ACD — так же правильный треугольник и $AC = AD$. А с другой стороны, отрезок AC равен длине высоты из K на AB, так как в правильном треугольнике высоты равны. Поэтому длины высот из K и D на AB равны, что и означает параллельность.



Второе решение. (То же самое другими словами). Пусть M — середина AB, тогда $AM = MB = BC = a$. Треугольник MBC — равнобедренный с углом

60°, следовательно, он равносторонний: $CM = a$. Тогда в треугольнике ABC медиана CM равна половине стороны AB, следовательно, он — прямоугольный и $\angle ACB = 90^\circ$, кроме того $\angle CAM = \angle MCA = 30^\circ$. Отсюда следует, что $\angle ACD = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$ и $\angle CAD = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Поэтому треугольник ACD также равносторонний.

Пусть E — точка пересечения AK и CD. Высота AE треугольника ACD является его медианой: $DE = CE$. Поэтому прямоугольные треугольники KED и KEC равны по двум катетам. Угол $CKE = 60^\circ$, так как $\angle KCD = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$. Следовательно, $\angle DKE = 60^\circ$. Наконец, AK — биссектриса равностороннего треугольника ACD, поэтому $\angle KAC = 30^\circ$, откуда $\angle KAB = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$, что и означает параллельность прямых DK и AB

6. При каком наименьшем натуральном n дробь

$$\frac{26 \cdot 27 \cdot \ldots \cdot (26+n)}{26 \cdot 25 \cdot \ldots \cdot (26-n)}$$

будет целой? *Обоснуйте свой ответ.*

Ответ. $n = 24$.

Решение. Пусть в числителе нет множителя 50. Разобьем множители и в числителе, и в знаменателе на группы по пять подряд идущих чисел слева направо (возможно, в последней группе окажется меньше пяти чисел). Первая группа в знаменателе делится на 25, а первая группа в числителе — только на 5. Также заметим, что если группа в числителе делится на 5, то соответствующая группа в знаменателе также делится на 5 (и степеней пятерки выше первой в этих группах нет). Поэтому знаменатель делится на бóльшую степень числа 5, чем числитель, следовательно, эта дробь будет не целой.

Докажем, что при $n = 24$ дробь будет целой. Заметим, что в этом случае и числитель, и знаменатель делятся на 5^6, но не делятся на 5^7. Поэтому домножение числителя на 25 не повлияет на то, будет ли дробь целой. Рассмотрим дробь

$$\frac{25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot \ldots \cdot 50}{26 \cdot 25 \cdot \ldots \cdot 2} = \frac{50!}{24! \cdot 26!}.$$

Это число равно количеству способов выбрать 24 элемента из 50 различных элементов без учета порядка, поэтому оно — целое.