Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан
7 класс, финальный тур. 28 января 2023 года. Решения задач

1. Аня подставила в выражение $(x-2)(x+*)$ вместо звездочки целое число, раскрыла скобки и привела подобные слагаемые. Оказалось, что какие-то два коэффициента при степенях x отличаются ровно в два раза. Свободный член (слагаемое, не содержащее x) тоже является коэффициентом. Какое число могла подставить Аня? *Найдите все ответы и объясните, почему другие невозможны.*

Ответ. -1, 1, 4.

Решение. Пусть Аня подставила число n. Имеем $(x-2)(x+n) = x^2+(n-2)x-2n$. Коэффициент при x^2 равен 1. Так так все коэффициенты — целые числа, то он не может быть в два раза больше другого коэффициента. Тогда остается четыре случая:

а) $2 \cdot 1 = n-2 \Rightarrow n = 4$.

б) $2 \cdot 1 = -2n \Rightarrow n = -1$.

в) $2 \cdot (n-2) = -2n \Rightarrow n = 1$.

г) $2 \cdot (-2n) = n-2 \Rightarrow n = \frac{2}{5}$.

Последний ответ не подходит, так как n — целое число.

2. По кругу стоят 50 человек, каждый из которых является или рыцарем, или лжецом (рыцари всегда говорят правду, лжецы — всегда врут). Мог ли каждый из них сказать фразу: «Количество рыцарей среди ближайших трех человек против часовой стрелки от меня больше, чем количество лжецов среди ближайших трех человек по часовой стрелке от меня», если известно, что среди них есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец? *Обоснуйте свой ответ.*

Ответ. Нет, не мог.

Первое решение. Будем называть *соседями* двух людей, если между ними стоит не более двух других людей. Рассмотрим рыцаря A. Справа от него есть сосед-рыцарь B. Справа от B есть хотя бы два рыцаря-соседа, так как слева есть сосед A. Пусть это рыцари C и D (C стоит между B и D). Тогда справа от D должно стоять три соседа-рыцаря: E, F, H, так как слева есть два рыцаря: B и C. Пусть H самый правый из них. Для него трое соседей слева — рыцари, поэтому его высказывание не могло быть верным.

Второе решение. Заметим, что высказывание из условия задачи равносильно высказыванию: «Среди моих шести соседей хотя бы четверо рыцарей». Действительно, оно означает, что если справа рыцарей — трое, то слева еще хотя бы один, если двое, то слева — хотя бы два, а если один, то слева — все трое рыцари.

Теперь заметим, что есть лжец, стоящий рядом с рыцарем. Более того, есть лжец X, справа от которого стоит рыцарь Y. Действительно, чтобы найти такую пару, достаточно взять любого лжеца и начать двигаться по кругу против часовой стрелки, до тех пор, пока не встретится первый рыцарь. Тогда пусть участок круга имеет следующий вид: A, B, C, X, Y, D, E, F.

Так как Y сказал правду, то среди пяти человек B, C, D, E, F есть как минимум 4 рыцаря (лжеца X считать не нужно). Тогда среди четырех человек B, C, D, E есть как минимум три рыцаря. Но они все, и еще Y — соседи X, поэтому у X есть не меньше четырех соседей-рыцарей. Следовательно, X говорит правду, и тогда он не может быть лжецом.

3. На столе в ряд стоят 6 красных, 8 зеленых и 10 синих стаканов. Известно, что все стаканы одного цвета или пустые, или заполнены чаем. Петя прошел вдоль этого ряда и наливал чай в каждый пустой стакан, и, наоборот, выпивал каждый полный. После него Вася так же прошелся вдоль этого ряда, наливая каждый пустой стакан и выпивая каждый полный. Петя потратил на свои действия ровно один час, а Вася на свои потратил больше 80 минут. Известно, что мальчики наливают чай с одинаковой скоростью, а пьют чай в два раза дольше, чем его наливают. Сколько времени требуется им, чтобы налить один стакан чая? *Укажите все ответы и объясните, почему других нет.*

Ответ. 2 мин или 2,5 мин.

Первое решение. Пусть t минут — искомое время. На каждый стакан они вместе тратят $t + 2t = 3t$ минут. Поэтому $24 \cdot 3t > 60 + 80$, откуда $t > \frac{140}{72}$. Петя потратил времени $6t \cdot a_1 + 8t \cdot a_2 + 10t \cdot a_3 = 60$, где числа a_1, a_2, a_3 равны 1 или 2, если соответствующая группа стаканов пустая или заполненая первоначально. Преобразуем это равенство:

$$(6a_1 + 8a_2 + 10a_3)t = 60,$$

$$t = \frac{60}{6a_1 + 8a_2 + 10a_3} > \frac{140}{72},$$

$$6a_1 + 8a_2 + 10a_3 < \frac{60 \cdot 72}{140}.$$

Заметим, что $30 < \frac{60 \cdot 72}{140} < 31$. Несложно понять, что последнее неравенство достигается только при $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$ или $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$. В первом случае получаем ответ $t = \frac{60}{6 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 10 \cdot 1} = \frac{60}{24} = 2,5$ минуты. Во втором случае получаем $t = \frac{60}{6 \cdot 2 + 8 \cdot 1 + 10 \cdot 1} = \frac{60}{30} = 2$ минуты. Стоит отметить, что оба значения достигаются, так как Петя потратит ровно час, а в сумме они потратят более 140 минут.

Второе решение. Пусть t минут — искомое время и перед ходом Пети имеется k пустых стаканов. Тогда, соответственно, перед его ходом $24 - k$ полных, а перед ходом Васи, наоборот, k полных и $24 - k$ пустых. Получаем следующие два условия:

$$tk + 2t(24 - k) = 60, \quad 2tk + t(24 - k) > 80.$$

Из первого уравнения находим $t(48-k) = 60$, $t = \dfrac{60}{48-k}$. Подставим это значение во второе неравенство:
$$\frac{60}{48-k}(24-k) > 80 \text{ или } 3(24-k) > 4(48-k).$$
Мы можем умножить обе части неравенства на $48-k$, так как $k \leqslant 24$. Раскрывая скобки, перепишем последнее неравенство в виде $72 + 3k > 192 - 4k$, откуда $7k > 120$. Это означает, что $k > \frac{120}{7} > 17$. Таким образом, перед ходом Пети было минимум 18 свободных стаканов. Но, складывая числа 6, 8 и 10, можно получить только два подходящих результата: $k_1 = 18$ и $k_2 = 24$. Ясно, что оба они подходят. Из первого уравнения тогда находим $t_1 = \frac{60}{30} = 2$, $t_2 = \frac{60}{24} = 2{,}5$.

4. У Дамира есть 50 внешне неотличимых гирь, которые весят 1 г, 2 г, 3 г, …, 50 г соответственно. Еще у него есть специальные весы, которые за одно взвешивание позволяют узнать суммарный вес любых k гирь. Докажите, что для любого натурального $k < 50$ Дамир сможет узнать вес всех гирь за 49 взвешиваний.

Решение. Будем считать, что $k \leqslant 25$, т.к. зная вес k гирь можно определить вес оставшихся $50 - k$ гирь. Приведем алгоритм для $k \leqslant 25$. Зафиксируем $k-1$ гирю, будем называть их *главными*. Взвесим с главными гирями по разу каждую из оставшихся гирь. Сложим все $50 - (k-1)$ масс, полученных на весах. Мы посчитали по $50-(k-1)$ раз каждую из главных гирь и по одному разу каждую из оставшихся. Отсюда мы сможем определить суммарный вес главных гирь, а значит и массу каждой из оставшихся. Тем самым мы уже определили вес хотя бы 25 гирь. У нас осталось $k-2$ действия, и каждым действием мы можем находить массу очередной главной гири, кладя на весы ее и любые $k-1$ из оставшихся гирь (у которых мы уже знаем массы). Так как $k \leqslant 25$, мы сможем найти достаточное количество оставшихся гирь.

5. Дан равнобедренный треугольник ABC с углом при вершине B, равным 96°. Точка O внутри треугольника ABC такова, что $\angle OCA = 30^\circ$, а $\angle OAC = 18^\circ$. Найдите величину угла $\angle BOC$. *Обоснуйте свой ответ.*

Ответ. $\angle BOC = 150^\circ$.

Решение. Пусть S — точка пересечения луча CO и биссектрисы BD треугольника ABC. Заметим, что треугольник ASC — равнобедренный, поскольку в нем SD медиана и высота одновременно. Подсчётом углов можно убедиться:

$\angle BAC = (180^\circ - 96^\circ)/2 = 42^\circ$.

$\angle BAS = \angle BCS = 42^\circ - 30^\circ = 12^\circ$.

$\angle SAO = \angle BAO - \angle BAS = (42^\circ - 18^\circ) - 12^\circ = 12^\circ$.

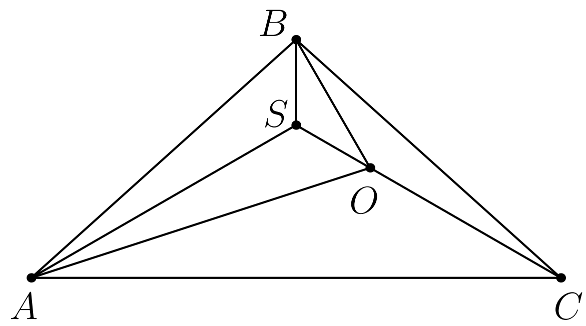
Таким образом, $\angle BAS = \angle SAO = 12^\circ$.

$\angle ASB = 180 - \angle SAB - \angle SBA = 180^\circ - 12^\circ - 96^\circ/2 = 120^\circ$.

$\angle ASB = \angle CSB$, так как BS — ось симметрии, откуда $\angle ASC = 360^\circ - 2\cdot 120^\circ = 120^\circ$.

Таким образом, $\angle ASB = \angle ASO = 120°$.

Следовательно, треугольники ASB и ASO равны по общей стороне AS и двум прилегающим углам. Из этого следует, что $AB = AO$ и треугольник ABO — равнобедренный. Значит, угол $\angle BOA = 78°$. Из условия следует, что $\angle AOC = 180° - 30° - 18° = 132°$. Следовательно, $\angle BOC = 360° - 78° - 132° = 150°$.



6. *Хромая ладья* за один ход может перейти из клетки, в которой стоит, только в любую соседнюю по стороне клетку. Хромая ладья обошла доску 30×30 и вернулась на первоначальную клетку, побывав в каждой клетке доски ровно по одному разу (а в начальной — два раза). Клетки вдоль пути были покрашены в три цвета по циклу: 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, ... Могли ли все клетки на диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний, быть покрашены в первый цвет? *Обоснуйте свой ответ.*

Ответ. Нет, не могли.

Первое решение. Пусть такое могло получиться. Назовем эту диагональ *главной.* Пронумеруем клетки главной диагонали числами от 1 до 30 слева направо. Покажем, что из каждой клетки главной диагонали ходы ведут вниз и вправо. Действительно, из клетки 1 есть только такие ходы. Если из клетки с номером k ходы ведут только вниз и вправо, то тогда из клетки с номером $k+1$ ходы тоже ведут вниз и вправо, иначе есть участок пути, состоящий из трех клеток, начало и конец которого лежат на главной диагонали. Его начало и конец не могут быть одновременно 1-го цвета. Но из этих рассуждений следует, что ходы из 30-ой клетки тоже ведут вниз и вправо. Но это невозможно. Следовательно, все клетки главной диагонали не могут быть покрашены в первый цвет.

Второе решение. Пусть такое могло получиться. Заметим, что сразу перед тем, как ладья пришла на главную диагональ, она находилась на клетке 3-го цвета, а сразу после того, как она ушла с главной диагонали, она находилась на клетке 2-го цвета. Но прийти на главную диагональ или уйти с нее ладья могла только с одной (или на одну) из двух соседних диагоналей, состоящих из 29 клеток. В сумме на них содержится 58 клеток, а 30 ходов на главную диагональ требуют $30 \cdot 2 = 60$ попарно различных клеток 2-го и 3-го цветов, никакая из которых не может участвовать сразу в двух из этих 30 ходах на главную диагональ. Противоречие.