Открытая поволжская олимпиада школьников по математике
12 декабря 2021г.

Довывод 9 класс.

1. Найдите все пары натуральных чисел (a, b) такие, что $a^a + b^b$ делится на $a^b \cdot b^a$.

2. Внутри вписанного пятиугольника $ABCDE$ отмечена точка F так, что $\angle ABF = 90^\circ = \angle EDF$. Оказалось, что $BC = CD = CF$. Докажите, что $\angle ACE = \angle BFD$.

3. Положительные числа x, y, z таковы, что $x + y + z = xyz$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \geqslant \frac{3}{4}\ .$$

4. На плоскости дано 30000 окружностей единичного радиуса. Докажите, что из них можно выбрать или 100 окружностей, никакие две из которых не пересекаются, или 100 окружностей, любые две из которых пересекаются. (Окружности считаем пересекающимися, если они имеют хотя бы одну общую точку.)

Открытая поволжская олимпиада школьников по математике
12 декабря 2021г.

Вывод 9 класс.

5. Последовательность задана условиями

$$a_n = 1 - \frac{2n^2}{1+\sqrt{1+4n^4}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Докажите, что число $\sqrt{a_1} + 2\sqrt{a_2} + \ldots + 20\sqrt{a_{20}}$ — целое.

6. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Докажите, что сумма диаметров вписанных окружностей треугольников ABD и CBD больше, чем сумма радиусов вписанных окружностей треугольников ABC и ADC.

7. Назовём *бубликом* размера n фигуру, которая получается из клетчатого прямоугольника периметра $n+4$, стороны которого больше 1, удалением всех клеток, не имеющих общих точек со сторонами этого прямоугольника. Найдите такое наименьшее вещественное a, что при любом натуральном n существует множество F из не более, чем $100n^a$ клеток на бесконечной клетчатой плоскости, из которого можно вырезать любой бублик размера n. (Если бублик повернуть на $90°$, то получится другой бублик).

Открытая поволжская олимпиада школьников по математике
12 декабря 2021г.

Довывод 10 класс.

1. Саша складывает четыре числа: два натуральных числа, их НОД и их НОК. Верно ли, что он может получить в результате любое натуральное число, большее миллиарда?

2. Дан тетраэдр $ABCD$, в котором $AD = BC$. Докажите, что если $\angle BAD - \angle ABD = \angle CBD$, то $\angle BCD - \angle BDC = \angle ADB$.

3. Докажите, что при положительных a, b, c выполнено неравенство

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c} + \frac{abc^2}{ab + bc + ca} > 3.$$

4. На плоскости дано 30000 окружностей единичного радиуса. Докажите, что из них можно выбрать или 100 окружностей, никакие две из которых не пересекаются, или 100 окружностей, любые две из которых пересекаются. (Окружности считаем пересекающимися, если они имеют хотя бы одну общую точку.)

Открытая поволжская олимпиада школьников по математике
12 декабря 2021г.

Вывод 10 класс.

5. К простому числу p слева и справа приписали по единице, и получили число Q. Оказалось, что в десятичной записи числа Q встречаются все 10 цифр. Докажите, что Q не делится на p.

6. Для положительного числа α обозначим $[\alpha\mathbb{N}]$ множество всех чисел вида $[\alpha n]$ для натурального числа n. Подмножество S множества $\{1, 2, \ldots, 2021\}$ назовём *хорошим*, если для каждого положительного числа β такого, что $S \subset [\beta\mathbb{N}]$, выполнено $\{1, 2, \ldots, 2021\} \subset [\beta\mathbb{N}]$. Какое наименьшее количество чисел может быть в хорошем подмножестве?

7. Биссектрисы равнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке I. На основании BC выбрана точка E, а на продолжении боковой стороны AB за точку B — точка D, причём $AI = ID$ и $AB \parallel IE$. Отрезки BE и ID пересекаются в точке F. На дуге ABC окружности, описанной около треугольника ABC, отмечена точка K так, что $BI \parallel CK$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника CIF лежит на прямой EK.

Открытая поволжская олимпиада школьников по математике
12 декабря 2021г.

Довывод 11 класс.

1. Саша складывает четыре числа: два натуральных числа, их НОД и их НОК. Верно ли, что он может получить в результате любое натуральное число, большее миллиарда?

2. Дан тетраэдр $ABCD$, в котором $\angle BAD - \angle ABD = \angle CBD$ и $\angle BCD - \angle BDC = \angle ADB$. Докажите, что $AD = BC$.

3. На плоскости дано 30000 окружностей единичного радиуса. Докажите, что из них можно выбрать или 100 окружностей, никакие две из которых не пересекаются, или 100 окружностей, любые две из которых пересекаются. (Окружности считаем пересекающимися, если они имеют хотя бы одну общую точку.)

4. Для положительного числа α обозначим $[\alpha\mathbb{N}]$ множество всех чисел вида $[\alpha n]$, где n — натуральное число n. Подмножество S множества $\{1, 2, \ldots, 2021\}$ назовём *хорошим*, если для каждого положительного числа β такого, что $S \subset [\beta\mathbb{N}]$, выполнено $\{1, 2, \ldots, 2021\} \subset [\beta\mathbb{N}]$. Какое наименьшее количество чисел может быть в хорошем подмножестве?

Открытая поволжская олимпиада школьников по математике
12 декабря 2021г.

Вывод 11 класс.

5. Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC с углом 60° при вершине B пересекаются в точке H. Точки A' и C' — середины сторон BC и AB соответственно. Луч $A'C'$ пересекает окружность, описанную около треугольника BC_1C, в точке X. Отрезок $A'C'$ пересекает окружность, описанную около треугольника AA_1B, в точке Y. Докажите, что описанные окружности треугольников AHC и BXY касаются.

6. В каждой целочисленной точке числовой прямой (т.е. точке, координата которой — целое число) записано по натуральному числу. Многочлен с целыми коэффициентами $P(x)$ таков, что для каждого натурального числа n сумма чисел в любых n последовательных целочисленных точках делится на $P(n)$. Докажите, что $P(x) = c \cdot x^k$, где $c \neq 0$ — целое число, а k — целое неотрицательное число.

7. Пусть a_1, a_2, ..., a_k — целые неотрицательные числа, $A = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$. Пусть $B \leqslant A$ — целое неотрицательное число. Рассмотрим все наборы $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ целых неотрицательных чисел, для которых $b_i \leqslant a_i$ при всех i и $b_1 + \ldots + b_k = B$. Докажите, что для суммы по всем таким наборам имеет место неравенство

$$\sum_{(b_1,\ldots,b_k)} \prod_{i=1}^{k} \frac{C_{a_i}^{b_i}}{C_{A-a_i}^{B-b_i}} \geqslant \left(C_A^B\right)^{2-k}.$$

Как и всегда, C_s^t — это количество t-элементных подмножеств s-элементного множества.